Analysis 326.022 · Nachklausur · Winter 2010/2011

Name ....

Mat. Nr. ....

SKZ ....

2011-03-14

Aufgabe 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Jede differenzierbare Funktion ist integrierbar.
- Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- Jede integrierbare Funktion ist differenzierbar.

Lösung. falsch, wahr, wahr, wahr, falsch, falsch.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

Lösung. Wegen $n^2 \leq n^n$ $(n \geq 2)$ gilt $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 2)$. Ferner ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ laut Vorlesung konvergent. Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ kovergiert.

Die Summandenfolge einer konvergenten Reihe muss gegen 0 konvergieren. Wegen

$$\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{1 - (2/3)^n}{1 + (2/3)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

kann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ also nicht konvergent sein.

Aufgabe 3 Außer dem in der Vorlesung eingeführten Begriff der Stetigkeit gibt es noch weitere Möglichkeiten, Stetigkeit zu definieren. Zum Beispiel heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig,* falls gilt:

$$\exists\ L \in \mathbb{R}\ \forall\ x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig im üblichen Sinn, aber nicht jede im üblichen Sinn stetige Funktion ist auch Lipschitz-stetig.

Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig.

(Hinweis: Eine mögliche Wahl für L ist $L = 2$.)

Lösung. Wähle $L = 2$. Zu zeigen ist dann

$$\forall\ x, y \in [0,1] : |x^2 - y^2| \leq 2|x - y|.$$

Seien $x, y \in [0,1]$. Dann gilt

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(|x| + |y|) \leq |x - y|(1 + 1) = 2|x - y|,$$

wie gefordert.

Aufgabe 4 Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$.
Zeigen Sie, dass f keine Extremstellen hat.

Lösung. Da der Definitionsbereich keine Randstellen hat und die Funktion differenzierbar ist, können Extremstellen nur dort auftreten, wo die Ableitung null ist.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3x^2(1+x^3)-(1-x^3)3x^2}{(1+x^3)^2} = -\frac{6x^2}{(1+x^3)^2} \\ &= 0 \quad \iff \quad x = 0. \end{aligned}$$

Als mögliche Extremstelle kommt also nur $x = 0$ in Frage.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-12x(1+x^3)^2 + 6x^2 2(1+x^3)3x^2}{(1+x^3)^4} \\ &= \frac{-12x - 12x^4 + 36x^4}{(1+x^3)^3} \\ &= 12\frac{-x+2x^4}{(1+x^3)^3} & \implies \quad f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= 12\frac{(-1+8x^3)(1+x^3)^3 - (-x+2x^4)3(1+x^3)^2 3x^2}{(1+x^3)^6} \\ &= 12\frac{-1+8x^3-x^3+8x^6+9x^3-18x^6}{(1+x^3)^4} \\ &= 12\frac{-1+16x^3-10x^6}{(1+x^3)^4} & \implies \quad f'''(0) = -12 \neq 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass auch in $x = 0$ kein Extremum vorliegt.

Aufgabe 5 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{e^{3x-y}}{x^2+y^2}$ und $v = (1,-1)$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial v} f(1,1)$.

Lösung.

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big) \\
&= \Big(\frac{e^{3x-y}3(x^2+y^2) - e^{3x-y}2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-e^{3x-y}(x^2+y^2) - e^{3x-y}2y}{(x^2+y^2)^2}\Big) \\
&= \frac{e^{3x-y}}{(x^2+y^2)^2}\Big(3x^2 - 2x + 3y^2, -(x^2+y^2+2y)\Big) \\
\Rightarrow \qquad \nabla f(1,1) &= \frac{e^{3-1}}{(1^2+1^2)^2}\big(3\,1^2 - 2\,1 + 3\,1^2, -(1^2+1^2+2\,1)\big) \\
&= \frac{e^2}{4}(4,4) = e^2(1,-1) \\
\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial v} f(1,1) &= (\nabla f(1,1)) \cdot (1,-1) = e^2(1,-1)\cdot(1,-1) = 2e^2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (19 + 2t + t^2, 3 - 4t - 2t^2, 1 + 4t + 2t^2).$$

b) Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit?

c) Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber in umgekehrter Richtung?

Lösung. Kurvenlänge:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 ||\gamma'(t)||dt = \int_0^1 \sqrt{(2+2t)^2 + (4+4t)^2 + (4+4t)^2}dt = \int_0^1 6(t+1)dt \\ &= 3(t+1)^2|_0^1 = 12 - 3 = 9. \end{aligned}$$

Doppelte Geschwindigkeit: $\delta\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^3$, $\delta(t) = (19 + 4t + 4t^2, 3 - 8t - 8t^2, 1 + 8t + 8t^2)$.
Rückwärts: $\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (19{+}2(1{-}t){+}(1{-}t)^2, 3{-}4(1{-}t){-}2(1{-}t)^2, 1{+}4(1{-}t){+}2(1{-}t)^2)$.