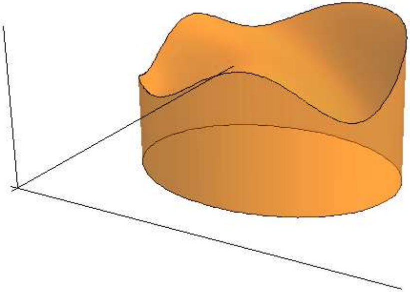
# 9 Volumen

# Intuition

Das Integral über eine zweidimensionale Funktion misst den Rauminhalt (das Volumen), der zwischen Funktionsgraph und Grundebene eingeschlossen ist.

## Intuition

Das Integral über eine zweidimensionale Funktion misst den Rauminhalt (das Volumen), der zwischen Funktionsgraph und Grundebene eingeschlossen ist.



# Notation

Für zwei Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ sei definiert:

$$\begin{aligned} a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad & a_1 \leq b_1, \\ & a_2 \leq b_2, \\ & \ldots, \\ & a_n \leq b_n. \end{aligned}$$

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(1) Die Menge

$$[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b \,\}$$

heißt *Kästchen* mit Randpunkten $a, b$.

# Definition 22

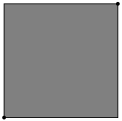
Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(1) Die Menge

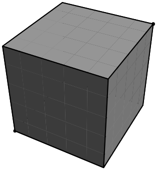
$$[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b \,\}$$

heißt *Kästchen* mit Randpunkten $a, b$.

$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(1) Die Menge

$$[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b \,\}$$

heißt *Kästchen* mit Randpunkten $a, b$.

Die Zahl

$$|[a, b]| := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

heißt Inhalt von $[a, b]$.

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(2) Eine *Zerlegung* von $[a, b]$ ist ein $n$-Tupel $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, wobei jedes $Z_i$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ im Sinn von Def. 12 ist, also etwa $Z_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i+1}$ mit

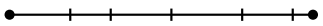
$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i.$$

## Definition 22

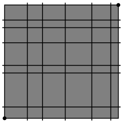
Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(2) Eine *Zerlegung* von $[a, b]$ ist ein $n$-Tupel $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, wobei jedes $Z_i$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ im Sinn von Def. 12 ist, also etwa $Z_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i+1}$ mit

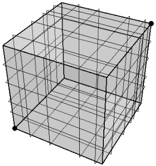
$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i.$$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(2) Eine *Zerlegung* von $[a, b]$ ist ein $n$-Tupel $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, wobei jedes $Z_i$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ im Sinn von Def. 12 ist, also etwa $Z_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i+1}$ mit

$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,k_i} = b_i.$$

Setze $I := \{1, \dots, k_1\} \times \{1, \dots, k_2\} \times \dots \times \{1, \dots, k_n\}$.
Dann heißt

$$K_i := \left[ \begin{pmatrix} x_{1,i_1-1} \\ \vdots \\ x_{n,i_n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1,i_1-1} \\ \vdots \\ x_{n,i_n} \end{pmatrix} \right] \subseteq \mathbb{R}^n$$

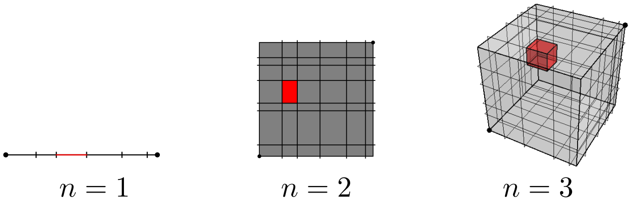
das *Kästchen* von $Z$ zum Index $i = (i_1, \dots, i_n) \in I$.

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(2) Eine *Zerlegung* von $[a, b]$ ist ein $n$-Tupel $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, wobei jedes $Z_i$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ im Sinn von Def. 12 ist, also etwa $Z_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i+1}$ mit

$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i.$$



## Definition 22

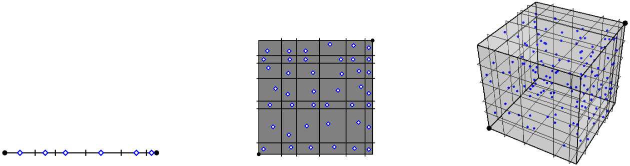
Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(3) Sei $\Xi := \{\, \xi_i : i \in I \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\Xi$ heißt *Menge von Zwischenpunkten* für $Z$, falls gilt $\xi_i \in K_i$ für jedes $i \in I$.

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(3) Sei $\Xi := \{\, \xi_i : i \in I \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\Xi$ heißt *Menge von Zwischenpunkten* für $Z$, falls gilt $\xi_i \in K_i$ für jedes $i \in I$.



$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(4) Sei weiter $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $[a, b] \subseteq D$, und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sigma_f(Z, \Xi) := \sum_{i \in I} f(\xi_i)|K_i|$$

die *Riemannsche Zwischensumme* von $f$ bzgl. $Z$ und $\Xi$.

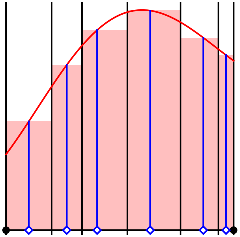
## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \le b$.

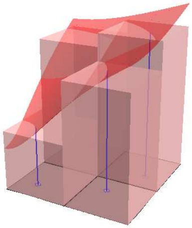
(4) Sei weiter $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $[a, b] \subseteq D$, und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sigma_f(Z, \Xi) := \sum_{i \in I} f(\xi_i)|K_i|$$

die *Riemannsche Zwischensumme* von $f$ bzgl. $Z$ und $\Xi$.



$n = 1$



$n = 2$

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\ s \in \mathbb{R}$$

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\ s \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0$$

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\ s \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ Z \text{ Zerl. von } [a, b]$$

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\ s \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ Z \text{ Zerl. von } [a,b]$$
$$\forall\ \Xi \text{ passend zu } Z :$$

# Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\ s \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ Z \text{ Zerl. von } [a, b]$$
$$\forall\ \Xi \text{ passend zu } Z : |\sigma_f(Z, \Xi) - s| < \varepsilon.$$

## Definition 22

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(5) $f$ heißt *(Riemann-)integrierbar* (ib) auf $[a, b]$, falls gilt

$$\exists\, s \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, Z \text{ Zerl. von } [a, b]$$
$$\forall\, \Xi \text{ passend zu } Z : |\sigma_f(Z, \Xi) - s| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{[a,b]} f(x)dx := s$$

das *Integral* von $f$ über den Bereich $[a, b]$.