Algebraische Zahlen

Definitionen:

Ein **Körper** ist eine Menge K mit 2 inneren Verknüpfungen + und * sodass gilt:

- die Verknüpfungen sind assoziativ
- die Verknüpfungen sind kommutativ
- es existieren neutrale Elemente bezüglich + und *
- jedes Element ist bezüglich + und * invertierbar
- es gibt keine Nullteiler

Ein **Vektorraum V** über einen Körper K ist eine Struktur bestehend aus einer nicht leeren Menge V mit ihren Elementen, den Vektoren/Tupel $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \ldots$ mit Einträgen aus K und einer Menge K mit den Skalaren a,b,x,... in der eine Addtiton und eine Multiplikation erklärt sind.

Unter dem **"algebraic number field" F** versteht man eine endliche Körpererweiterung der retionalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
Man kann F als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ betrachten.

Beispiele:

- Einer der kleinsten Körper ist $\mathbb{Q}$ selbst.
- Gaussian rationals bezeichnet mit $\mathbb{Q}(i)$ und den Elementen $a + bi$ mit $a,\ b$ aus $\mathbb{Q}$ und $i^2 = -1$.

Beispiele:

- Einer der kleinsten Körper ist $\mathbb{Q}$ selbst.
- Gaussian rationals bezeichnet mit $\mathbb{Q}(i)$ und den Elementen $a + bi$ mit $a,\ b$ aus $\mathbb{Q}$ und $i^2 = -1$.
  $\Rightarrow$ die Gaussian rationals bilden einen zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

Beispiele:

- Einer der kleinsten Körper ist $\mathbb{Q}$ selbst.
- Gaussian rationals bezeichnet mit $\mathbb{Q}(i)$ und den Elementen $a + bi$ mit $a,\ b$ aus $\mathbb{Q}$ und $i^2 = -1$.
  $\Rightarrow$ die Gaussian rationals bilden einen zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind keine Körper von algebraische Zahlen, da sie unendliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind. Dies folgt aus der Überabzählbarkeit.
$\mathbb{Q}^2$ ist auch kein Körper von algebraischen Zahlen, da er Nullteiler besitzt.

Sei E eine Körpererweiterung über K.
K[x]bezeichne den Ring aller Polynome
$p(x) = a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ mit a_i aus K. Diese Ausdrücke heißen
Polynome über K.

Ein Element ϵ aus E heißt genau dann **algebraisch über K**, wenn ϵ
Nullstelle eines Polynoms über K ist.
Die Körpererweiterung E über K heißt henau dann algebraisch über
K,wenn jedes Element von E algebraisch über K ist.

Satz: Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

Satz: Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

$\hookrightarrow$ Jeder Körper von algebraischen Zahlen ist algebraisch.

Satz: Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

- $\hookrightarrow$ Jeder Körper von algebraischen Zahlen ist algebraisch.
- $\hookrightarrow$ Jede algebraische Zahl kann als Nullstelle eines Polynoms über K mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden.

Satz: Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

- $\hookrightarrow$ Jeder Körper von algebraischen Zahlen ist algebraisch.
- $\hookrightarrow$ Jede algebraische Zahl kann als Nullstelle eines Polynoms über K mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden.

Das minimale Polynom einer algebraischen Zahl a ist das normierte ireduzible Polynom f mit dem niedrigsten Grad, für das gilt: $f(a) = 0$.

Ein Polynom bei dem der führende Koeffizient 1 ist, nennt man **normietes Polynom**.

Falls alle Koeffizienten eines normierten Polynoms ganze Zahlen sind, dann wird x **algebraische ganze Zahl** genannt.