Übungsblatt 2

Besprechung am **27.10.2011**

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob diese Folgen konvergieren und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

$$\begin{array}{lllllllll} a_n & = & -3n + \frac{2}{n} + 1, & b_n & = & \frac{4n^2-2}{n} - \frac{4n^3-2n^2+n+1}{n^2}, & c_n & = & \left(-\frac{\pi}{n}\right)^n, \\ d_n & = & \frac{n-1}{3n+2} - \frac{3n+2}{n-1}, & e_n & = & \frac{1}{4}e^n + \frac{1}{4}e^{-n}, & f_n & = & \frac{(n+1)!}{3^n}. \end{array}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{6n^2}{3n^2-7}$ gegen 2 konvergiert, indem Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass $|a_n - 2| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 3 Sei

$$\begin{aligned} a_0 &= 4, \\ a_n &= \sqrt{3 + a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 4 Eine Folge heißt alternierend, wenn die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind. Beweisen Sie, dass jede konvergente alternierende Folge den Grenzwert 0 besitzt.

Aufgabe 5 Implementieren Sie eine Funktion in Sage, die für $n_0 \in \mathbb{N}$ das n_0-te Glied der Folge

$$\begin{aligned} a_0 &= 4, \\ a_n &= a_{n-1} + 4\frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

berechnet. Erzeugen Sie eine Wertetabelle für die Folge und stellen Sie anhand dieser Tabelle eine Vermutung auf, ob und gegen welchen Wert a_n konvergiert. Implementieren Sie ferner eine Funktion zur Berechnung der Glieder von

$$b_n = 2a_{2n} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Erstellen Sie auch für b_n eine Wertetabelle. Wie hängen die Folgen a_n und b_n zusammen? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie die Aufgabe mit anderen Ihnen bekannten Folgen a_n wiederholen.