Übungsblatt 3

Besprechung am **3.11.2011**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie mithilfe der Kriterien aus der Vorlesung welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k k^2.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+4)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{3k+1}.$$

Aufgabe 3 Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgenden Aussagen:

(a) $$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right) \Rightarrow \left(\exists\, a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a\right)$$

(b) $$\left(\exists\, a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$$

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst induktiv, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n,$$

wobei Sie die Pascalsche Dreiecksrelation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ verwenden dürfen. Wegen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ folgt dann, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}$ und damit ergibt sich die Aussage mit $x = y = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie Funktionen in Sage, die Näherungen für die Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion berechnen indem sie die Reihendarstellung aus Definition 8 nach N Schritten abbrechen.

Testen Sie Ihre Funktionen für die *Gleitkommazahlen* $x = 0.00001, 1.5, 1000.5$ und $N = 500, 5000$ und vergleichen Sie mit den Werten, die die Sage internen Funktionen exp, sin, cos liefern.

In welchem Bereich sind die Näherungswerte gut bzw. schlecht? Versuchen Sie eine Erklärung für die schlechte Konvergenz in manchen Testfälle zu finden.