Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2011**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2011/analysis/

Übungsblatt 9

Besprechung am **12.1.2012**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Extremwerte der Funktionen

$$f : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{2xy}{(2-x)(2+y)},$$
$$g : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin(\pi x)\cos(\pi y).$$

Aufgabe 2 Ein zerstreuter Professor möchte mittels Riemannscher Zwischensummen zeigen, dass für $D = [0,1] \times [0,1]$ und $f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2$ gilt: $\int_D f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = \frac{2}{3}$.
Er verrechnet sich aber bei der Abschätzung der Riemannschen Zwischensummen. Helfen Sie ihm und zeigen Sie, dass

$$\frac{(2n-1)(n-1)}{3n^2} \le \sigma_f\left(Z^{(k)}, \Xi\right) \le \frac{(2n+1)(n+1)}{3n^2},$$

wobei (wie in der VL) $Z^{(k)} = \left(\left(0, \frac{1}{k}, \ldots, 1\right), \left(0, \frac{1}{k}, \ldots, 1\right)\right)$ und $\Xi = \{\xi_{ij} \mid i,j = 1, \ldots, n\}$ eine beliebige zu $Z^{(k)}$ passende Menge von Zwischenpunkten ist.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \frac{2xy}{(2-x)(2+y)}\, d(x,y), \qquad I_2 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 - 2xy + y^2\right)\, dy\, dx.$$

Skizzieren Sie das Gebiet über das in I_2 integriert wird.

Aufgabe 4 Berechnen Sie das Integral

$$\int_E \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)\, d(x,y),$$

wobei $E = g(D)$ mit $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$ und $g : D \to \mathbb{R},\ (r,\phi) \mapsto \left(r\cos\phi, \frac{r}{2}\sin\phi\right)$. Über welches Gebiet wird hier integriert?

Aufgabe 5 Approximieren Sie das Integral einer gegebenen Funktion f über $[a,b] \times [a,b]$ durch Riemann-Summen mit einer uniformen Zerlegung des Gebiets

$$Z^{(N)} = \{[z_{i-1}, z_i] \times [z_{j-1}, z_j] \mid i,j = 1, \ldots, N\}, \qquad z_k = a + k\frac{b-a}{N},$$

wobei die Funktionswerte angenähert werden durch (a) Auswertung an den Mittelpunkten der Kästchen (b) durch den Mittelwert der Funktionswerte an den vier Endpunkten der Kästchen, d.h. durch $F_{i,j} = \frac{1}{4}\left(f(z_{i-1}, z_{j-1}) + f(z_i, z_{j-1}) + f(z_{i-1}, z_j) + f(z_{i-1}, z_j)\right)$. Testen Sie Ihre Programme mit $[a,b] = [-1,1]$ und den Funktionen aus Aufgabe 1 für $N = 25, 50, 75$.

Erholsame Ferien und Guten Rutsch!