Analysis 326.022 · Winter 2011/2012 · **Vorlesungsklausur** 06.02.2012

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Ordnen Sie die folgenden Formelbruchstrücke so an, dass sie die Formel in der Definition für Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ ergeben.

$$\boxed{\exists}, \boxed{\forall}, \boxed{\forall}, \boxed{:}, \boxed{\Rightarrow}, \boxed{x \in \mathbb{R}}, \boxed{|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon}, \boxed{|x - \xi| < \delta}, \boxed{\varepsilon > 0}, \boxed{\delta > 0}.$$

Lösung. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

Aufgabe 2 Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn sowohl $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ als auch $((-1)^n a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent sind, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lösung. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Angenommen $a \neq 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, insbesondere ist die Folge $(1/a_n)_{n=0}^{\infty}$ dann konvergent. Da die Folge $((-1)^n a_n)_{n=0}^{\infty}$ nach Annahme konvergent ist und das Produkt konvergenter Folgen nach Satz der Vorlesung ebenfalls konvergent ist, würde folgen, dass auch die Folge $((-1)^n a_n \frac{1}{a_n})_{n=0}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent ist. Das ist aber nicht der Fall. Widerspruch zur Annahme $a \neq 0$. Also gilt $a = 0$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie

$$\int \arctan(x)\, dx = x \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

Hinweis: Sie dürfen die Ableitungsformel $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ als bekannt voraussetzen.

Lösung. Wir zeigen, dass die Ableitung der rechten Seite gleich $\arctan(x)$ ist:

$$\begin{aligned}
\Big(x \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \log(1 + x^2)\Big)' &= \arctan(x) + x \arctan'(x) - \frac{1}{2} \frac{2x}{1 + x^2} \\
&= \arctan(x) + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2} \\
&= \arctan(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = 3x - 7y + 2z + 5$$

keine Extremstellen besitzt.

Lösung. Der Definitionsbereich hat keine Randpunkte und die Funktion ist differenzierbar, deshalb müsste nach Satz der Vorlesung an jeder Extremstelle der Gradient null werden. Das ist aber nirgendwo der Fall, denn für alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt:

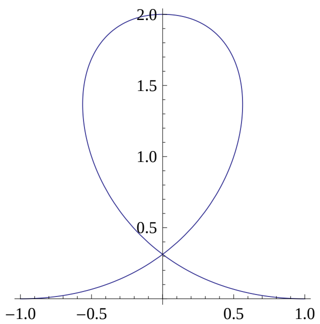
$$\nabla f(x, y, z) = (3, -7, 2) \neq (0, 0, 0).$$

Also kann die Funktion keine Extremstellen haben.

Aufgabe 5 Ein Looping in einer Achterbahn gilt dann als sicher, wenn er einer Kurve γ entspricht, die überall zweimal differenzierbar ist, und für die γ'' an jedem Punkt t stetig ist. Untersuchen Sie, ob folgende Kurve als Looping geeignet ist:

$$\gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \big(-4t^2 - 3t, -4t^3 - 6t^2 + 2\big) & \text{falls } t \leq 0 \\ \big(4t^2 - 3t, 4t^3 - 6t^2 + 2\big) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$



Lösung. Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen von γ. Zunächst ist

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \big(-8t-3, -12t^2-12t, \big) & \text{falls } t < 0 \\ \big(8t-3, 12t^2-12t\big) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Da γ' konvergent bei $t = 0$ ist, gilt außerdem $\gamma'(0) = (-3, 0)$.

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \big(-8, -24t-12\big) & \text{falls } t < 0 \\ \big(8, 24t-12\big) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Wegen $8 \neq -8$ ist γ' in $t = 0$ nicht ableitbar, und daher insbesondere γ'' dort nicht stetig. Also ist die Kurve als Looping nicht geeignet.