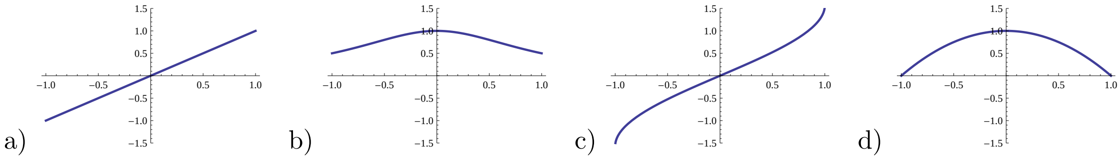
Analysis 326.022 · Winter 2011/2012 · **Zweite Vorlesungsklausur** 12.04.2012

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Ordnen Sie den folgenden Funktionen $f_i \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ die passenden Graphen zu.

1. $f_1(x) = 1 - x^2$, 2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, 3. $f_3(x) = \log(\exp(x))$, 4. $f_4(x) = \arcsin(x)$



Lösung. 1-d, 2-b, 3-a, 4-c.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie alle Zahlen $q \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$$

konvergiert.

Lösung. Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall: $|q| < 1$. In diesem Fall ist $|q^{n^2}| = |q|^{n^2} \leq |q|^n$, weil $n^2 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe für $|q| < 1$ und dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$ in diesem Fall konvergiert.
2. Fall: $|q| \geq 1$. In diesem Fall ist $|q^{n^2}| = |q|^{n^2} \geq |q|^n \geq 0$. Aus der Divergenz der geometrischen Reihe für $|q| \geq 1$ und dem Minorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$ in diesem Fall divergiert.
Zusammenfassend gilt also: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1,1)$ ist.

Aufgabe 3 Es sei $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:

$$\forall\, x \in (a,b)\ \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon \Rightarrow y \in (a,b).$$

Gilt die Formel für auch, wenn man (a,b) durch das geschlossene Intervall $[a,b]$ ersetzt?

Hinweis: Es ist möglicherweise hilfreich, sich die Aussage der Formel zunächst anhand einer Skizze zu veranschaulichen.

Lösung. Sei $x \in (a,b)$ beliebig.
Wähle $\varepsilon = \min\{|x-a|, |x-b|\}$. Dann ist $\varepsilon \geq 0$. Wegen $x \in (a,b)$ ist $x \neq a$ und $x \neq b$, und daher $\varepsilon \neq 0$, also sogar $\varepsilon > 0$, wie gefordert.
Sei nun $y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \varepsilon$, d. h. $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Zu zeigen ist $y \in (a,b)$, d.h. $y > a$ und $y < b$.
1. $y < x + \varepsilon \leq x + |x-b| = x + |b-x| = x + b - x = b$, wobei verwendet wurde, dass $b > x$ ist und deshalb $|b-x| = b-x$.
2. $y > x - \varepsilon \geq x - |x-a| = x - x + a = a$, wobei verwendet wurde, dass $x > a$ ist und deshalb $|x-a| = x-a$.
Damit ist gezeigt $y \in (a,b)$.

Für ein geschlossenes Intervall gilt die Formel nicht, denn z. B. für $x = b$ und beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ kann man $y = b + \frac{1}{2}\varepsilon$ wählen und hat dann $|x-y| < \varepsilon$, aber $y \notin [a,b]$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

Lösung. Es genügt, eine Folge $((x_n,y_n))_{n=0}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq 1$ anzugeben.
Wähle zum Beispiel $(x_n,y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Dann gilt klarerweise $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(1/n)^2+(1/n)^2}}{1/n+1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1.$$

Aufgabe 5 Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x,y)ds$$

für

$$\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \big(\sin(t), \cos(t)\big) \quad \text{und} \quad f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy$$

Lösung. $\gamma'(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ ist stetig und es gilt

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} = 1.$$

Mit dem entsprechenden Satz der Vorlesung folgt

$$\int_\gamma f(x,y)ds = \int_0^\pi f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt = \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)dt = \left[\tfrac{1}{2}\sin(t)^2\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$