Zur Definition von Pi

Wir wissen:

- $\cos(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe definiert, nämlich $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ (Definition 8.3).
- Funktionen, die durch Potenzreihen definiert sind, sind stetig (Satz 13).
- Auf stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz (Satz 14) anwendbar.

Wir wollen zeigen, daß die Kosinusfunktion im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle hat.

Zunächst wissen wir $\cos(0) = 1$ (Satz 9.1, oder aber direkt durch einsetzen von $x = 0$ in die Definition). Für $x = 2$ haben wir aus der Definition

$$\begin{aligned}\cos(2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} \\ &= \underbrace{1 - \tfrac{1}{2}2^2 + \tfrac{1}{24}2^4}_{=-1/3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n}.\end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n}\right| &= \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2n} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2n}\right) \\ &\leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.\end{aligned}$$

Deshalb folgt aus dem Majorantenkriterium

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{144}.\end{aligned}$$

Zusammen mit der vorherigen Rechnung folgt daraus

$$\cos(2) = -\frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} \leq -\frac{1}{3} + \frac{1}{144} = -\frac{47}{144} < 0.$$

Damit ist also gezeigt, dass $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von cos folgt daraus mit dem Zwischenwertsatz die Existenz (mindestens) einer Zahl $\xi \in [0, 2]$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ ist dann definiert als die kleinste positive Zahl mit $\cos(\pi/2) = 0$.

Unter Verwendung dieser Definition lassen sich jetzt weitere Eigenschaften von sin und cos beweisen. Insbesondere:

- $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ (jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$).
- $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.