Beispiel zur Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

Problem: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$ und $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen das Integral

$$\int_K f(x,y)d(x,y)$$

ausrechnen.

Das Problem ist unhandlich, weil K kein Kästchen im Sinn von Def. 26.1 ist. Würde man nach Def. 27.2 vorgehen, müsste man eine Hilfsfunktion $\tilde{f}$ betrachten, die auf einem Kasten definiert ist, der K enthält, und die innerhalb von K mit f übereinstimmt und außerhalb von f Null ist.

Das ist möglich, aber mühsam. Weniger aufwendig geht es mit Satz 35. Betrachte die Hilfsfunktion

$$g\colon [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad g(r,\phi) := \big(r\sin(\phi), r\cos(\phi)\big).$$

Dann ist $g(D) = K$, d. h. die Funktion g transformiert das Kästchen $[(0,0),(1,2\pi)]$ in den Kreis K. In der Notation des Satzes gilt nun

$$J(r,\phi) = \begin{pmatrix} \sin(\phi) & r\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

(Die erste Zeile von J ist $\nabla\big(r\sin(\phi)\big)$, die zweite Zeile ist $\nabla\big(r\cos(\phi)\big)$.) Daraus ergibt sich

$$|\det J(r,\phi)| = |-r\sin(\phi)^2 - r\cos(\phi)^2| = r.$$

Weil g injektiv ist und J nie null (was streng genommen beides noch zu überprüfen wäre; wir wollen es hier aber mal ohne Beweis glauben), liefert der Satz

$$\begin{aligned} \int_K f(x,y)d(x,y) &= \int_{[(0,0),(1,2\pi)]} f(r\sin(\phi), r\cos(\phi))r\, d(r,\phi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\sin(\phi), r\cos(\phi))r\, d\phi\, dr. \end{aligned}$$

Damit ist die Integration von f über dem Kreis auf die Integration einer anderen Funktion über einem Kästchen zurückgeführt.

Wenn jetzt zum Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2$ ist, bekommt man

$$\begin{aligned} \int_K f(x,y)d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2\sin(\phi)^2 + r^2\cos(\phi)^2)r\, d\phi\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\, d\phi\, dr = \int_0^1 \Big[\phi r^3\Big]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dr = \int_0^1 2\pi r^3\, dr = \tfrac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$