Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2011**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2011/analysis/

Übungsblatt 10

Besprechung am **19.01.2012**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Kurve mit der x- bzw. y-Achse:

$$f : [-2,2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t(t^2-1), e^t - 2).$$

Berechnen Sie außerdem die jeweilige Durchlaufgeschwindigkeit an jedem dieser Punkte. Geben Sie eine Kurve an, die die gleichen Punkte wie f durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass es kein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Länge der Kurve f_k kleiner ist als 6π.

$$f_k : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto ((k^2-2k+4)\cos(t), (|-k+1|+3)\sin(t)).$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die Kurve

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t, t\sin(\frac{\pi}{t})), & t \neq 0 \\ (0,0), & t = 0 \end{cases}$$

nicht messbar ist.

Aufgabe 4 Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen, d.h.

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

$$q(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0,$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m, \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Kurve

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (p(t), q(t))$$

messbar ist.

Aufgabe 5 Approximieren Sie – diesmal aber wirklich – das Integral einer gegebenen Funktion f über $[a,b] \times [a,b]$ durch Riemann-Summen mit einer uniformen Zerlegung des Gebiets

$$Z^{(N)} = \{[z_{i-1}, z_i] \times [z_{j-1}, z_j] \mid i, j = 1, \ldots, N\}, \qquad z_k = a + k\frac{b-a}{N},$$

wobei die Funktionswerte angenähert werden durch (a) Auswertung an den Mittelpunkten der Kästchen (b) durch den Mittelwert der Funktionswerte an den vier Endpunkten der Kästchen, d.h. durch $F_{i,j} = \frac{1}{4}\left(f(z_{i-1}, z_{j-1}) + f(z_i, z_{j-1}) + f(z_{i-1}, z_j) + f(z_{i-1}, z_j)\right)$. Testen Sie Ihre Programme mit $[a,b] = [-1,1]$ und den Funktionen aus Aufgabe 1 für $N = 25, 50, 75$.