

Übungsblatt 4

Besprechung am 10.11.2011

Aufgabe 1 Zeigen/widerlegen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$:

$$f_1(x) = \sin(x^2 - 1), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & x \neq 2; \\ 1 & x = 2, \end{cases} \quad f_3(x) = e^x(x^2 - 2 \cos(x)).$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, stückweise definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{1}{2} & -2 \leq x < -1, \\ x^2 + x + 1 & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{bx+1} & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

stetig ist und skizzieren Sie sie auf ihrem Definitionsbereich.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist mittels Satz 16, wobei $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie Satz 12(2), d.h., gegeben $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit f und g stetig auf D , zeigen Sie, dass

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

stetig auf D ist.

Aufgabe 5 Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann im Rechner näherungsweise durch ihre Funktionswerte $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, an gegebenen Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ repräsentiert werden. Zum Beispiel wäre eine mögliche Darstellung der Funktion $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$ durch das Paar (\vec{x}, \vec{f}) gegeben mit

$$\vec{x} = [0., 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.], \\ \vec{f} = [0., 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1.].$$

Implementieren Sie ein Programm in Sage, das eine Näherung für den Funktionswert einer so gegebenen Funktion an einem gegebenen Punkt $z \in [a, b]$ durch lineare Interpolation berechnet. D.h., bestimmen Sie zuerst das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, in dem z liegt, und dann ein $y \in \mathbb{R}$ so, dass die Punkte $(x_i, f(x_i)), (z, y), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ auf einer Geraden liegen. Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten erlaubt. Testen Sie Ihr Programm an den Funktionen aus der Datei testfaelle.txt und visualisieren Sie die Funktionen und ihre Näherungen.