Lösungsvorschlag für Aufgabe 4 von Blatt 3

Teil (a) zeigen wir einmal mit dem Hinweis und einmal direkt:

4(a) mit Hinweis: Im ersten Schritt zeigen wir mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1}$$

Für $n = 0$ haben wir $1 = 1$, d.h., wir versuchen jetzt die Formel für $n+1$ herzuleiten: Im ersten Schritt verwenden wir die Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}.\end{aligned}$$

In der erste Summe shiften wir den Summationsindex und erhalten so weiter:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Die Potenzen von x und y stimmen jetzt in beiden Summen überein. Wir ziehen die Summen über dem gemeinsamen Summationsbereich $k = 1, \dots, n$ zusammen, d.h., wir müssen in der ersten Summe den letzten Term und in der zweiten Summe den ersten Term extra anschreiben:

$$= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}.$$

Für den Ausdruck in der eckigen Klammer können wir die Pascalsche Dreiecksrelation verwenden:

$$\begin{aligned}&= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die herausgezogenen Terme wieder als erstes, bzw. letztes Glied in der Summe eingefügt und erhalten was zu zeigen war.

Aus dem zweiten Teil des Hinweises folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2(n-k)+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1}, \tag{2}$$

wobei im letzten Schritt die Summationsvariable k durch $j = n - k$ ersetzt wurde (läuft den Summationsbereich einfach in umgekehrter Reihenfolge durch).

Zusammengefasst folgt aus (1) für $x = y = 1$ mit n ersetzt durch $2n+1$, dass

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}.$$

Andererseits kann diese Summe in die Summation über die geraden und ungeraden Terme zerlegt werden und mit (2) folgt dann:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}.$$

Wenn wir die letzten beiden Identitäten zusammennehmen und durch 2 dividieren folgt die Aussage.

4(a) ohne Hinweis: wir zeigen die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n$$

direkt mit Induktionsbeweis. Für $n = 0$ gilt die obige Formel, das heisst wir versuchen jetzt zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+3}{2k+1} = 4^{n+1}.$$

Im ersten Schritt wenden wir die Pascalsche Dreiecksrelation an und ziehen dazu vorher den ersten und letzten Summanden heraus:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+3}{2k+1} = \binom{2n+3}{1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{2n+2}{2k+1} + \binom{2n+2}{2k} \right] + \binom{2n+3}{2n+3}. \tag{3}$$

Für jeden dieser Summanden wenden wir jetzt wieder die Dreiecksrelation an und erhalten weiter:

$$= (2n+3) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{2n+1}{2k+1} + 2\binom{2n+1}{2k} + \binom{2n+1}{2k-1} \right] + 1.$$

Jetzt betrachten wir die drei Summen getrennt. Laut Induktionsannahme erhalten wir für die erste Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} - \binom{2n+1}{1} = 4^n - (2n+1).$$

Für die zweite Summe können wir (2) verwenden und ebenfalls die Induktionsannahme:

$$2\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} - \binom{2n+1}{0} \right) = 2(4^n - 1).$$

Für die letzte Summe shiften wir wieder den Summationsindex und können dann wieder die Induktionsannahme verwenden:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} - \binom{2n+1}{2n+1} = 4^n - 1.$$

Wenn wir diese drei Teilergebnisse zusammenfügen und in (3) einsetzen ergibt das

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+3}{2k+1} = (2n+3) + 4^n - (2n+1) + 2(4^n - 1) + 4^n - 1 + 1 = 4\,4^n = 4^{n+1}.$$

Für Teil (b) können wir jetzt Teil (a) verwenden. Wir beginnen mit der linken Seite und setzen die Definitionen für Sinus und Kosinus ein:

$$\begin{aligned} 2\sin(x)\cos(x) &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &= 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^n\right) \end{aligned}$$

Das Produkt der Reihen auf der rechten Seite können wir mit der Formel aus Satz 10(2) berechnen mit $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ und $b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Dann gilt laut Formel:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+n-k}}{(2k+1)!(2n-2k)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 2^{2n}. \end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt mit Teil (a). Damit haben wir:

$$2\sin(x)\cos(x) = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 2^{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sin(2x).$$