Anwendung: Regressionsparabel.

Wie in Abschnitt 6.C betrachten wir eine Punktwolke

$$W = \{\, (x_k, y_k) \mid k = 1, \dots, n \,\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

von der jetzt aber angenommen sei, daß den (stark verrauschten) Daten ein quadratischer Zusammenhang

$$y = ax^2 + bx + c$$

zugrunde liegt.

Frage: Wie sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit der mittlere quadratische Abstand zwischen den Punkten in W und der Parabel minimal wird?

Ansatz: Zu minimieren ist also die Abstandsfunktion

$$A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad A(a, b, c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (ax_k^2 + bx_k + c - y_k)^2,$$

wobei die x_k, y_k als konstant angenommen sind.
Berechnung der Kandidaten für Minimalstellen von A:

$$\begin{aligned}
&\nabla A(a,b,c) = \Big(\frac{\partial}{\partial a} A(a,b,c), \frac{\partial}{\partial b} A(a,b,c), \frac{\partial}{\partial c} A(a,b,c)\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2(ax_k^2 + bx_k + c - y_k)x_k^2, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2(ax_k^2 + bx_k + c - y_k)x_k, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2(ax_k^2 + bx_k + c - y_k)\Big) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & a \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^4 & \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wegen Satz 29 muß die optimale Wahl (a, b, c) eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems sein. Man kan weiters zeigen, daß, sofern das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung tatsächlich ein Minimum der Funktion A ist.

Beispiel: Siehe Mathematica-Notebook.