Analysis für Informatiker
Vorlesungszusammenfassung

Lernziele

Lernziele

- die Hauptbegriffe der Analysis und ihre wichtigsten Eigenschaften kennen.

Lernziele

- die Hauptbegriffe der Analysis und ihre wichtigsten Eigenschaften kennen.

- Geometrische Anschauung in formale Sprache übersetzen können (und umgekehrt).

Lernziele

- die Hauptbegriffe der Analysis und ihre wichtigsten Eigenschaften kennen.
- Geometrische Anschauung in formale Sprache übersetzen können (und umgekehrt).
- Definitionen und Sätze in konkreten Beispielen anwenden können.

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Folgen

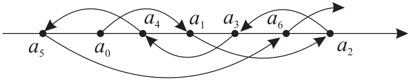
Folgen

Was ist das?

Folgen

Was ist das?

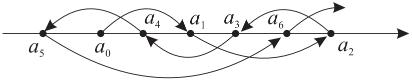
- Informal:



Folgen

Was ist das?

- Informal:

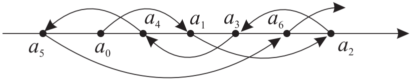


- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Folgen

Was ist das?

- Informal:



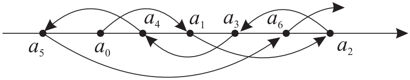
- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Was kann man damit machen?

Folgen

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

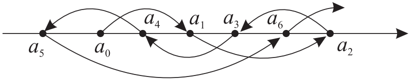
Was kann man damit machen?

- Manche irrationale Zahlen lassen sich als Grenzwerte von Folgen beschreiben.

Folgen

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

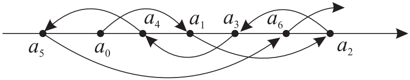
Was kann man damit machen?

- Manche irrationale Zahlen lassen sich als Grenzwerte von Folgen beschreiben.
- Unstetigkeitsstellen von Funktionen lassen sich mit Hilfe von geeigneten Folgen nachweisen.

Folgen

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Was kann man damit machen?

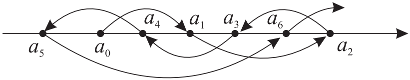
- Manche irrationale Zahlen lassen sich als Grenzwerte von Folgen beschreiben.
- Unstetigkeitsstellen von Funktionen lassen sich mit Hilfe von geeigneten Folgen nachweisen.

Was muss man darüber wissen?

Folgen

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Was kann man damit machen?

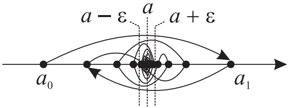
- Manche irrationale Zahlen lassen sich als Grenzwerte von Folgen beschreiben.
- Unstetigkeitsstellen von Funktionen lassen sich mit Hilfe von geeigneten Folgen nachweisen.

Was muss man darüber wissen?

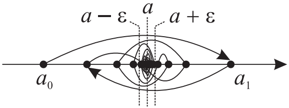
- Wie man typische Folgen auf Konvergenz untersucht und gegebenenfalls ihren Grenzwert bestimmt.

Konvergenz von Folgen

Konvergenz von Folgen

- Informal: 

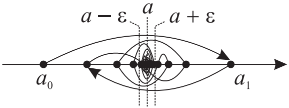
Konvergenz von Folgen

- Informal: 

- Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert von (a_n), falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Konvergenz von Folgen

- Informal: 

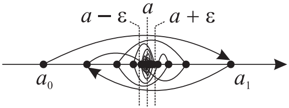
- Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert von (a_n), falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Konvergenz ist kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$ und $/$, aber im allgemeinen **nicht** mit Verkettung.

Konvergenz von Folgen

- Informal:



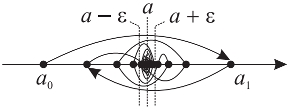
- Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert von (a_n), falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Konvergenz ist kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$ und $/$, aber im allgemeinen **nicht** mit Verkettung.
- Sandwichtheorem: wenn $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $c_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $b_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Konvergenz von Folgen

- Informal:

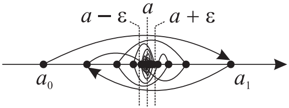


- Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert von (a_n), falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Konvergenz ist kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$ und $/$, aber im allgemeinen **nicht** mit Verkettung.
- Sandwichtheorem: wenn $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $c_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $b_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
- Monotoniekriterium: wenn (a_n) beschränkt und monoton ist, dann ist (a_n) auch konvergent.

Konvergenz von Folgen

- Informal: 

- Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert von (a_n), falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Konvergenz ist kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$ und $/$, aber im allgemeinen **nicht** mit Verkettung.
- Sandwichtheorem: wenn $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $c_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $b_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
- Monotoniekriterium: wenn (a_n) beschränkt und monoton ist, dann ist (a_n) auch konvergent.
- Wichtige Beispiele:
  - $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
  - $n^\alpha q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ falls $|q| < 1$
  - $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$
  - $(1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}.$

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen

- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen

- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Reihen

Reihen

Was ist das?

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).
- Die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl für (s_n) als auch (im Fall der Konvergenz) für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ verwendet.

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).
- Die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl für (s_n) als auch (im Fall der Konvergenz) für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ verwendet.

Was kann man damit machen?

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).
- Die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl für (s_n) als auch (im Fall der Konvergenz) für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ verwendet.

Was kann man damit machen?

- Potenzreihen werden dazu verwendet, Funktionen wie $\exp$, $\sin$, $\cos$, usw. zu definieren.

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).
- Die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl für (s_n) als auch (im Fall der Konvergenz) für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ verwendet.

Was kann man damit machen?

- Potenzreihen werden dazu verwendet, Funktionen wie $\exp$, $\sin$, $\cos$, usw. zu definieren.

Was muss man darüber wissen?

Reihen

Was ist das?

- Informal: eine „unendliche Summe“
- Formal: Ist (a_n) eine Folgen, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Reihe über (a_n).
- Die Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl für (s_n) als auch (im Fall der Konvergenz) für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ verwendet.

Was kann man damit machen?

- Potenzreihen werden dazu verwendet, Funktionen wie $\exp$, $\sin$, $\cos$, usw. zu definieren.

Was muss man darüber wissen?

- Wie man typische Reihen auf Konvergenz untersucht und gegebenenfalls ihren Grenzwert bestimmt.

Konvergenz von Reihen

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:
  - Majorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:
  - Majorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Minorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:
  - Majorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Minorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Quotientenkriterium: wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und kleiner [größer] als 1 ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent [divergent].

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:
  - Majorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Minorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Quotientenkriterium: wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und kleiner [größer] als 1 ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent [divergent].
  - Wurzelkriterium: wenn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert und kleiner [größer] als 1 ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent [divergent].

Konvergenz von Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, sofern der Grenzwert rechts existiert. Anderenfalls ist die Reihe divergent.
- Konvergenztests:
  - Majorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Minorantenkriterium: wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Quotientenkriterium: wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und kleiner [größer] als 1 ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent [divergent].
  - Wurzelkriterium: wenn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert und kleiner [größer] als 1 ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent [divergent].
- Wichtige Beispiele:
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div.
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ div. falls $|q| \geq 1$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$.

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.
- Für jedes konkrete $x \in \mathbb{R}$ wird aus der Potenzreihe eine „gewöhnliche“ Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.
- Für jedes konkrete $x \in \mathbb{R}$ wird aus der Potenzreihe eine „gewöhnliche“ Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.
- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.
- Für jedes konkrete $x \in \mathbb{R}$ wird aus der Potenzreihe eine „gewöhnliche“ Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.
- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.
- Das kann entweder ganz $\mathbb{R}$, oder nur $\{0\}$, oder ein Intervall mit Mittelpunkt 0 sein (offen, halboffen, oder geschlossen).

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.
- Für jedes konkrete $x \in \mathbb{R}$ wird aus der Potenzreihe eine „gewöhnliche“ Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.
- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.
- Das kann entweder ganz $\mathbb{R}$, oder nur $\{0\}$, oder ein Intervall mit Mittelpunkt 0 sein (offen, halboffen, oder geschlossen).
- Ist D der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dann wird durch

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Funktion erklärt.

Potenzreihen

- Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei x ein Parameter ist.
- Für jedes konkrete $x \in \mathbb{R}$ wird aus der Potenzreihe eine „gewöhnliche“ Reihe, die konvergent oder divergent sein kann.
- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.
- Das kann entweder ganz $\mathbb{R}$, oder nur $\{0\}$, oder ein Intervall mit Mittelpunkt 0 sein (offen, halboffen, oder geschlossen).
- Ist D der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dann wird durch

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  eine Funktion erklärt.
- Auf diese Weise sind zum Beispiel die Funktionen $\exp$, $\sin$, $\cos$ definiert.

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Konvergenz von Funktionen

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.
- Formal: s ist der Grenzwert von f für x gegen ξ, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon.$$

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.
- Formal: s ist der Grenzwert von f für x gegen ξ, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon.$$

Was kann man damit machen?

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.
- Formal: s ist der Grenzwert von f für x gegen ξ, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon.$$

Was kann man damit machen?

- Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit basieren auf dem Konvergenzbegriff für Funktionen

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.
- Formal: s ist der Grenzwert von f für x gegen ξ, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon.$$

Was kann man damit machen?

- Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit basieren auf dem Konvergenzbegriff für Funktionen

Was muss man darüber wissen?

Konvergenz von Funktionen

Was ist das?

- Informal: Wenn x sich einer Stelle ξ nähert, nähert sich $f(x)$ dem Grenzwert.
- Formal: s ist der Grenzwert von f für x gegen ξ, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - s| < \varepsilon.$$

Was kann man damit machen?

- Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit basieren auf dem Konvergenzbegriff für Funktionen

Was muss man darüber wissen?

- Wie man typische Funktionen auf Konvergenz untersucht und gegebenenfalls den Grenzwert berechnet.

Stetigkeit

Stetigkeit

Was ist das?

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Was kann man damit machen?

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Was kann man damit machen?

- Stetige Funktionen haben viele wünschenswerte Eigenschaften, die „beliebige“ Funktionen im allgemeinen nicht haben.

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Was kann man damit machen?

- Stetige Funktionen haben viele wünschenswerte Eigenschaften, die „beliebige“ Funktionen im allgemeinen nicht haben.

Was muss man darüber wissen?

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Was kann man damit machen?

- Stetige Funktionen haben viele wünschenswerte Eigenschaften, die „beliebige“ Funktionen im allgemeinen nicht haben.

Was muss man darüber wissen?

- Dass Stetigkeit kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$, $/$ und $\circ$ ist, dass die Umkehrfunktion von stetigen Funktionen stetig ist, und dass Potenzreihen stetig sind.

Stetigkeit

Was ist das?

- Informal: Eine kleine Änderung von x bewirkt nur eine kleine Änderung von $f(x)$.
- Formal: $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Was kann man damit machen?

- Stetige Funktionen haben viele wünschenswerte Eigenschaften, die „beliebige“ Funktionen im allgemeinen nicht haben.

Was muss man darüber wissen?

- Dass Stetigkeit kompatibel mit $+$, $-$, $\cdot$, $/$ und $\circ$ ist, dass die Umkehrfunktion von stetigen Funktionen stetig ist, und dass Potenzreihen stetig sind.
- Den Zwischenwertsatz: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < f(b)$, $y \in [f(a), f(b)]$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$.

Ableitung

Ableitung

Was ist das?

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$

Was kann man damit machen?

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

Was kann man damit machen?

- Extremwerte berechnen, Nullstellen approximieren (mit Newton-Iteration), Punktwolken analysieren (Regression), Stammfunktionen bestimmen („Ableiten rückwärts“), u.v.m.

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

Was kann man damit machen?

- Extremwerte berechnen, Nullstellen approximieren (mit Newton-Iteration), Punktwolken analysieren (Regression), Stammfunktionen bestimmen („Ableiten rückwärts“), u.v.m.

Was muss man darüber wissen?

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$

Was kann man damit machen?

- Extremwerte berechnen, Nullstellen approximieren (mit Newton-Iteration), Punktwolken analysieren (Regression), Stammfunktionen bestimmen („Ableiten rückwärts“), u.v.m.

Was muss man darüber wissen?

- Wie man Ableitungen ausrechnet und damit z. B. eine Funktion auf Extremstellen untersucht.

Ableitung

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die Steigung („Steilheit“) des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle
- Formal: $f'(\xi) := \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

Was kann man damit machen?

- Extremwerte berechnen, Nullstellen approximieren (mit Newton-Iteration), Punktwolken analysieren (Regression), Stammfunktionen bestimmen („Ableiten rückwärts“), u.v.m.

Was muss man darüber wissen?

- Wie man Ableitungen ausrechnet und damit z. B. eine Funktion auf Extremstellen untersucht.
- Den Mittelwertsatz: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ableitbar, $f(a) < f(b)$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Integral

Integral

Was ist das?

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

- Die Größe von krummlinig berandeten Flächen ausrechnen.

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

- Die Größe von krummlinig berandeten Flächen ausrechnen.

Was muss man darüber wissen?

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

- Die Größe von krummlinig berandeten Flächen ausrechnen.

Was muss man darüber wissen?

- Hauptsatz der Integralrechnung: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

- Die Größe von krummlinig berandeten Flächen ausrechnen.

Was muss man darüber wissen?

- Hauptsatz der Integralrechnung: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Unbestimmtes Integral: $\int f(x)dx = g(x)$ falls $g'(x) = f(x)$

Integral

Was ist das?

- Informal: Ein Maß für die (orientierte) Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.
- Formal: Technische Konstruktion mit Zerlegung, Zwischenpunkten, usw.

Was kann man damit machen?

- Die Größe von krummlinig berandeten Flächen ausrechnen.

Was muss man darüber wissen?

- Hauptsatz der Integralrechnung: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Unbestimmtes Integral: $\int f(x)dx = g(x)$ falls $g'(x) = f(x)$
- Wie man einfache Integrale ausrechnet

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

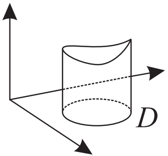
Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gebirge

Gebirge

Was ist das?

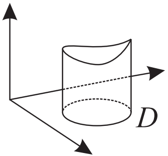
Gebirge



Was ist das?

- Informal:

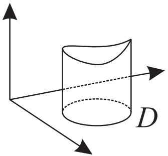
Gebirge



Was ist das?

- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Gebirge

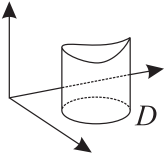


Was ist das?

- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

Gebirge



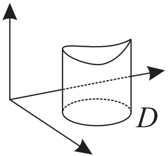
Was ist das?

- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

- massive Objekte in mehrdimensionalen Räumen beschreiben.

Gebirge



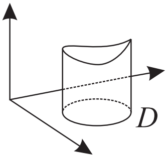
Was ist das?

- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

- massive Objekte in mehrdimensionalen Räumen beschreiben.
- Zusammenhänge modellieren, die von mehr als einem Parameter abhängen.

Gebirge



Was ist das?

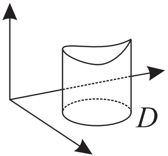
- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

- massive Objekte in mehrdimensionalen Räumen beschreiben.
- Zusammenhänge modellieren, die von mehr als einem Parameter abhängen.

Was muss man darüber wissen?

Gebirge



Was ist das?

- Informal:
- Formal: Eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

- massive Objekte in mehrdimensionalen Räumen beschreiben.
- Zusammenhänge modellieren, die von mehr als einem Parameter abhängen.

Was muss man darüber wissen?

- wie man solche Funktionen auf Stetigkeit untersucht, Richtungsableitungen bestimmt und einfache Integrale berechnet.

Konvergenz und Stetigkeit

Konvergenz und Stetigkeit

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert bei einem Punkt $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen einen Wert $y \in \mathbb{R}$, falls

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : ||x - \xi|| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

Konvergenz und Stetigkeit

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert bei einem Punkt $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen einen Wert $y \in \mathbb{R}$, falls

  $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : ||x - \xi|| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

- Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede (!) Folge $(x^{(k)})$ in D, die (koordinatenweise) gegen ξ konvergiert, die Folge $(f(x^{(k)}))$ in $\mathbb{R}$ gegen y konvergiert.

Konvergenz und Stetigkeit

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert bei einem Punkt $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen einen Wert $y \in \mathbb{R}$, falls

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : ||x - \xi|| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

- Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede (!) Folge $(x^{(k)})$ in D, die (koordinatenweise) gegen ξ konvergiert, die Folge $(f(x^{(k)}))$ in $\mathbb{R}$ gegen y konvergiert.
- f ist stetig in ξ, falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ist.

Konvergenz und Stetigkeit

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert bei einem Punkt $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen einen Wert $y \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : ||x - \xi|| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

- Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede (!) Folge $(x^{(k)})$ in D, die (koordinatenweise) gegen ξ konvergiert, die Folge $(f(x^{(k)}))$ in $\mathbb{R}$ gegen y konvergiert.
- f ist stetig in ξ, falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ist.
- Als Nachweis für Unstetigkeit in einem Punkt ξ genügt es, zwei Folgen $(x^{(k)})$ und $(y^{(k)})$ in D anzugeben mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = \xi$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(k)}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y^{(k)})$.

Konvergenz und Stetigkeit

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert bei einem Punkt $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen einen Wert $y \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{\xi\} : ||x - \xi|| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

- Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede (!) Folge $(x^{(k)})$ in D, die (koordinatenweise) gegen ξ konvergiert, die Folge $(f(x^{(k)}))$ in $\mathbb{R}$ gegen y konvergiert.
- f ist stetig in ξ, falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ist.
- Als Nachweis für Unstetigkeit in einem Punkt ξ genügt es, zwei Folgen $(x^{(k)})$ und $(y^{(k)})$ in D anzugeben mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = \xi$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(k)}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y^{(k)})$.
- Als Nachweis für Stetigkeit genügt es **nicht,** dass f stetig „bezüglich jeder Variablen“ ist.

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

- Richtungsableitung: $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$.
  Dabei leben v und ξ in $\mathbb{R}^n$ und h lebt in $\mathbb{R}$.

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

- Richtungsableitung: $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+hv)-f(\xi)}{h}$.
  Dabei leben v und ξ in $\mathbb{R}^n$ und h lebt in $\mathbb{R}$.
- Partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) =$ Richtungsableitung bezüglich eines Einheitsvektors $=$ Ableitungen bezüglich einer Variablen

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

- Richtungsableitung: $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$.
  Dabei leben v und ξ in $\mathbb{R}^n$ und h lebt in $\mathbb{R}$.
- Partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)$ = Richtungsableitung bezüglich eines Einheitsvektors = Ableitungen bezüglich einer Variablen
- Gradient:
  $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \right)$

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

- Richtungsableitung: $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$.
  Dabei leben v und ξ in $\mathbb{R}^n$ und h lebt in $\mathbb{R}$.
- Partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)$ = Richtungsableitung bezüglich eines Einheitsvektors = Ableitungen bezüglich einer Variablen
- Gradient:
  $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \right)$
- Totale Ableitung: Ein Vektor $f'(\xi) \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - h \cdot f'(\xi)}{||h||} = 0.$$

Hier lebt h jetzt in $\mathbb{R}^n$ und $h \cdot f'(\xi)$ meint das Skalarprodukt.

Richtungsableitung, Gradient und totale Ableitung

- Richtungsableitung: $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+hv)-f(\xi)}{h}$.
  Dabei leben v und ξ in $\mathbb{R}^n$ und h lebt in $\mathbb{R}$.
- Partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)$ = Richtungsableitung bezüglich eines Einheitsvektors = Ableitungen bezüglich einer Variablen
- Gradient:
  $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \right)$
- Totale Ableitung: Ein Vektor $f'(\xi) \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - h \cdot f'(\xi)}{||h||} = 0.$$

  Hier lebt h jetzt in $\mathbb{R}^n$ und $h \cdot f'(\xi)$ meint das Skalarprodukt.
- Falls die totale Ableitung existiert, gilt $f'(\xi) = \nabla f(\xi)$.
  Es kann aber sein, dass $\nabla f(\xi)$ existiert, aber $f'(\xi)$ nicht.

Extremwertbestimmung

Extremwertbestimmung

- Wenn f differenzierbar ist und ξ eine Extremstelle von f, die nicht am Rand von D liegt, dann muss $\nabla f(\xi) = 0$ gelten.

Extremwertbestimmung

- Wenn f differenzierbar ist und ξ eine Extremstelle von f, die nicht am Rand von D liegt, dann muss $\nabla f(\xi) = 0$ gelten.
- Für die Punkte ξ, wo $\nabla f(\xi) = 0$ gilt, betrachtet man die Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen:

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Berechne alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(H - \lambda I_n) = 0$. Dann gilt:

Extremwertbestimmung

- Wenn f differenzierbar ist und ξ eine Extremstelle von f, die nicht am Rand von D liegt, dann muss $\nabla f(\xi) = 0$ gelten.
- Für die Punkte ξ, wo $\nabla f(\xi) = 0$ gilt, betrachtet man die Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen:

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

  Berechne alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(H - \lambda I_n) = 0$. Dann gilt:
  - Sind all diese Zahlen positiv, liegt in ξ ein Minimum vor.

Extremwertbestimmung

- Wenn f differenzierbar ist und ξ eine Extremstelle von f, die nicht am Rand von D liegt, dann muss $\nabla f(\xi) = 0$ gelten.
- Für die Punkte ξ, wo $\nabla f(\xi) = 0$ gilt, betrachtet man die Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen:

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

  Berechne alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(H - \lambda I_n) = 0$. Dann gilt:
  - Sind all diese Zahlen positiv, liegt in ξ ein Minimum vor.
  - Sind all diese Zahlen negativ, liegt in ξ ein Maximum vor.

Extremwertbestimmung

- Wenn f differenzierbar ist und ξ eine Extremstelle von f, die nicht am Rand von D liegt, dann muss $\nabla f(\xi) = 0$ gelten.
- Für die Punkte ξ, wo $\nabla f(\xi) = 0$ gilt, betrachtet man die Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen:

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

  Berechne alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(H - \lambda I_n) = 0$. Dann gilt:
  - Sind all diese Zahlen positiv, liegt in ξ ein Minimum vor.
  - Sind all diese Zahlen negativ, liegt in ξ ein Maximum vor.
  - Sind manche dieser Zahlen positiv und andere negativ, liegt in ξ kein Extremum vor.

Integral und Volumen

Integral und Volumen

- Anschauung: Volumen zwischen Graph und Grundfläche.

Integral und Volumen

- Anschauung: Volumen zwischen Graph und Grundfläche.
- Integrale über Gebirge lassen sich als verschachtelte gewöhnliche Integrale schreiben:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \cdots dx_1.$$

Dabei ist $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Integral und Volumen

- Anschauung: Volumen zwischen Graph und Grundfläche.
- Integrale über Gebirge lassen sich als verschachtelte gewöhnliche Integrale schreiben:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \cdots dx_1.$$

  Dabei ist $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Falls D nicht von der Form $[a, b]$ ist, aber wenigstens $D \subseteq [a, b]$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt, setzt dann f zu einer Funktion $\tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ fort, die außerhalb von D Null ist und definiert $\int_D f(x)dx := \int_{[a,b]} \tilde{f}(x)dx$.

Integral und Volumen

- Anschauung: Volumen zwischen Graph und Grundfläche.
- Integrale über Gebirge lassen sich als verschachtelte gewöhnliche Integrale schreiben:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \cdots dx_1.$$

  Dabei ist $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Falls D nicht von der Form $[a, b]$ ist, aber wenigstens $D \subseteq [a, b]$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt, setzt dann f zu einer Funktion $\tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ fort, die außerhalb von D Null ist und definiert $\int_D f(x)dx := \int_{[a,b]} \tilde{f}(x)dx$.
- Für solche D ist das Volumen $V(D)$ definiert als $V(D) := \int_D 1dx$, sofern dieses Integral existiert.

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Gesamtpanorama

Reelle Zahlen

Folgen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Rechenregeln für $\lim$
- Sandwichtheorem
- Monotoniekriterium

Reihen
- Konvergenzbegriff
- Standardbeispiele
- Minoranten- und Majorantenkriterium
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen

1D-Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral
- Anwendungen

„Gebirge“ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Richtungsableitung, totale Ableitung
- Extremwertberechnung
- Integral und Volumen

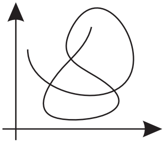
Kurven $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Konvergenzbegriff
- Stetigkeit
- Ableitung
- Länge und Kurvenintegral

Kurven

Kurven

Was ist das?

Kurven

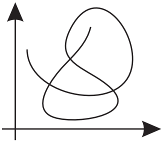


Was ist das?

- Informal:

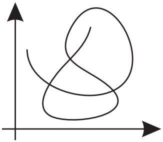
Kurven

Was ist das?

- Informal: 
- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Kurven

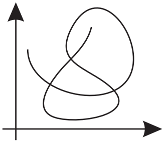
Was ist das?

- Informal: 
- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

Kurven

Was ist das?

- Informal: 
- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

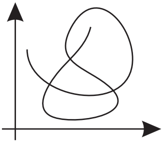
Was kann man damit machen?

- Eindimensionale geometrische Objekte (Fäden, Drähte, usw.) modellieren.

Kurven

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

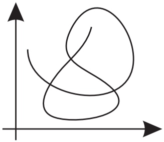
Was kann man damit machen?

- Eindimensionale geometrische Objekte (Fäden, Drähte, usw.) modellieren.
- Flugbahnen von Punkten im Raum beschreiben.

Kurven

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

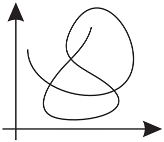
- Eindimensionale geometrische Objekte (Fäden, Drähte, usw.) modellieren.
- Flugbahnen von Punkten im Raum beschreiben.

Was muss man darüber wissen?

Kurven

Was ist das?

- Informal:



- Formal: Eine Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Was kann man damit machen?

- Eindimensionale geometrische Objekte (Fäden, Drähte, usw.) modellieren.
- Flugbahnen von Punkten im Raum beschreiben.

Was muss man darüber wissen?

- Wie man eine Kurve auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht, und wie man einfache Kurvenintegrale berechnet.

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Kurvenintegral

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Kurvenintegral

- Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ist stetig, falls jede Koordinatenfunktion $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Kurvenintegral

- Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ist stetig, falls jede Koordinatenfunktion $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist.
- γ ist ableitbar, falls jede Koordinatenfunktion $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ableitbar ist. In diesem Fall gilt $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$.

  Anschauung: Der Vektor $\gamma'(t)$ zeigt in die Richtung, in die sich die Kurve zum Zeitpunkt t fortsetzt. Die Zahl $||\gamma'(t)||$ ist ein Maß für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Kurvenintegral

- Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ist stetig, falls jede Koordinatenfunktion $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist.
- γ ist ableitbar, falls jede Koordinatenfunktion $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ableitbar ist. In diesem Fall gilt $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$.

  Anschauung: Der Vektor $\gamma'(t)$ zeigt in die Richtung, in die sich die Kurve zum Zeitpunkt t fortsetzt. Die Zahl $||\gamma'(t)||$ ist ein Maß für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.
- Falls $\gamma\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und differenzierbar ist und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_\gamma f(x)ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt.$$

  Die Länge von γ ist definiert als $L(\gamma) := \int_\gamma 1ds$.