Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2012**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2012/analysis/

Übungsblatt 10

Besprechung am **24.01.2013**

Aufgabe 1 Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ der Form

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos(\phi) \\ f(\phi)\sin(\phi) \end{pmatrix},$$

wobei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist (d.h. die Ableitung ist stetig), bezeichnet man auch als Kurve in Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass für eine solche Kurve γ gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f^2(\phi) + (f'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi.$$

Berechnen Sie weiters die Länge der als Herzkurve bezeichneten Funktion, die durch $a = 0$, $b = 2\pi$ und $f(\phi) := 1 + \cos(\phi)$ gegeben ist. *Hinweis:* $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$.

Aufgabe 2 a) In welchem Punkt ihres Definitionsbereichs ist die Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve f minimal?

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(t^2 - 4, t^3 - 2t - 7\right).$$

b) Bestimmen Sie die Länge der folgenden Kurven:

$$f_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\sin^3(t), \cos^3(t)),$$
$$f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t - 1, 3t^2 + 2, 6t^3 - 3).$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Kurve mit der x- bzw. y-Achse:

$$f : [-1, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left((t^2 - 2)(t + 3), \frac{3\sin(\pi t)}{\pi}\right).$$

Berechnen Sie außerdem die jeweilige Durchlaufgeschwindigkeit an jedem dieser Punkte. Geben Sie eine Kurve an, die die gleichen Punkte wie f durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Kurve

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t, t\sin(\frac{\pi}{t})), & t \neq 0, \\ (0, 0), & t = 0, \end{cases}$$

nicht messbar ist.

Aufgabe 5 Implementieren Sie ein Programm in Sage, das näherungsweise die Länge einer gegebenen Kurve f im Intervall $[a, b]$ berechnet. Testen Sie Ihr Programm an den Kurven aus Aufgabe 2 b) sowie an der Kurve $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, \sqrt{1 - t^2})$, um eine Näherung an π zu berechnen.