Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2012**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2012/analysis/

Übungsblatt 3

Besprechung am **15.11.2012**

Aufgabe 1 Ein (unsterblicher, geduldiger) Wurm kriecht auf einem 1 Meter langen Gummiband vorwärts. Hat er einen Zentimeter zurückgelegt, muss er erst einmal ein wenig verschnaufen. In jeder dieser Pausen wird das Gummiband gleichmäßig auseinandergezogen, so dass es um einen Meter länger wird. Der Wurm startet seine Odyssee an einem der beiden Enden des Bandes. Kommt der Wurm jemals am anderen Ende des Gummibandes an?

Aufgabe 2 Bestimmen Sie (auch mithilfe der Kriterien aus der Vorlesung), welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+22}{n^4+19n^3+88} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

Aufgabe 3 (a) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie

$$\left(\exists\, a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(b) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ divergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 4 Zeigen/widerlegen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sin\left(\exp(x^2) + \cos(2x)\right)(x^2+7)$

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x}, & \text{falls } x \neq 0 \wedge x \neq -1, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 5 Implementieren Sie das auf dem Zwischenwertsatz basierende Bisektionsverfahren zur Approximation einer Nullstelle in Sage:
Gegeben sind eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sodass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen. In jedem Schritt wird das Intervall halbiert und in jener Hälfte des Intervalls weitergesucht, bei dem f angewandt auf die beiden Grenzen des Intervalls unterschiedliche Vorzeichen ergibt. Unterschreitet die Länge des Intervalls einen bestimmten Wert (z.B. 10^{-10}), wird das Verfahren abgebrochen und der Mittelpunkt des aktuellen Intervalls als Ergebnis ausgegeben. Sollte bei einem Zwischenschritt eine Grenze des Intervalls bereits Nullstelle sein, wird diese Grenze natürlich unmittelbar als Ergebnis ausgegeben.
Testen Sie ihr Programm für die Funktion $\cos(x)$ und das Startintervall $[0,2]$ sowie für mindestens zwei weitere Funktionen.