Übungsblatt 6

Besprechung am **6.12.2012**

Aufgabe 1 Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 10 [m/s] vom Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Ermitteln Sie seine Flughöhe $w(t)$ in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t, die maximale Steighöhe sowie den Zeitpunkt der Wiederkehr, indem Sie $w''(t) = -9.81\,[\mathrm{m/s}^2]$ zweimal unbestimmt integrieren und die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen $w(0)$ und $w'(0)$ ermitteln.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{a)} \int x\log(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int x\,e^{-x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ über dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x,$$

indem Sie zunächst $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bestimmen, so dass

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^4 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

die Partialbruchzerlegung des Integranden ist. Integrieren Sie dann termweise!

Aufgabe 5 Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ und einem Intervall $[a, b]$ soll ein Näherungswert für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden. Dazu wird $[a, b]$ in gleich große Teilintervalle zerlegt. Implementieren und vergleichen Sie die folgenden zwei Verfahren zur numerischen Integration: einerseits die Approximation mittels Riemannsummen, andererseits die *Kepler'sche Fassregel* (auch bekannt als *Simpsonregel*). Diese approximiert ein Integral auf dem Teilintervall $[a_i, a_{i+1}]$ mit der Formel

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{6}\left(f(a_i) + 4f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + f(a_{i+1})\right).$$

Denken Sie daran, dass bei dem zweiten Verfahren doppelt so viele Funktionswerte berechnet werden müssen, zu einem fairen Vergleich also nur halb so viele Teilintervalle gewählt werden sollten.

Als Beispiele testen Sie das Integral aus Aufgabe 4, sowie die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos(10x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 3x\right)\,\mathrm{d}x.$$