Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2012**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2012/analysis/

Übungsblatt 8

Hinweis: Die Lösungen sind schriftlich auszuarbeiten und am **10.01.2013** abzugeben.

Aufgabe 1 Für welche $x \in \mathbb{R}$ exisitiert jeweils der Grenzwert? Berechnen Sie ihn für Aufgabe a) gegebenenfalls auch.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + xn} - n\right)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^3} x^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!} x^n$, wobei $p(n)$ wie folgt definiert ist: $p(n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ prim ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to [a, b]$ mit $a < b$ einen *Fixpunkt* hat, also

$$\exists\, x \in [a, b] : f(x) = x.$$

Finden Sie weiters eine Funktion $f_1\colon [a, b] \to [a, b]$, die nicht überall stetig ist, und eine stetige Funktion $f_2\colon (a, b) \to (a, b)$, die beide keinen Fixpunkt haben.

Aufgabe 3 Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(0) \neq 0$. Bestimmen Sie Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x < 0, \\ a + b\, g(x), & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Berechnen Sie zu jeder angegebenen Funktion alle lokalen Extremwerte. Welche sind auch globale Extremwerte?

a) $f_1\colon [-3, 3] \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$

b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 e^{|x-1|}$

Aufgabe 5 Funktionen in mehreren Veränderlichen:

a) Berechnen Sie die Gradienten von

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^y + \sin(x)\cos(xy),$$

$$f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x^2 e^{y^2} \sin(xyz)}{\sqrt{z}} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktionen

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2 + 4y,$$

$$f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xe^{-x^2-y^2}.$$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die Maxima der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \log\big(x^2 + y^2 - 2xy + 1\big)$$

unter der Bedingung, dass die Norm von (x, y) gleich 1 ist!

Hinweis: Zum Lösen solcher Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen werden *Lagrange-Multiplikatoren* verwendet. Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Die Funktion f soll unter der Bedingung $g = c$, $c \in \mathbb{R}$, maximiert werden. Dazu definiert man, unter Hinzunahme einer neuen Variablen λ, die *Lagrangefunktion*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n, \lambda) := f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot \big(g(x_1, \ldots, x_n) - c\big).$$

Es gilt nun folgende Aussage: Für alle Lösungen $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ des Nebenbedingungsproblems existiert ein $\tilde{\lambda}$, so dass $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{\lambda})$ ein *stationärer Punkt* von Λ ist, d.h. dass der Gradient von Λ an dieser Stelle gleich $(0, \ldots, 0)$ ist.