10. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Sei V ein K-Vektorraum und sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Elementen aus V. Man zeige: $\mathrm{L}(v_i)_{i\in I}$ ist ein K-Vektorraum.

2. Welche der Funktionen

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - 2z, 3y - z)$,

   (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x^2 - y + z)$

ist linear bzw. nicht linear? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

3. Man beweise (z.B. mittels vollständiger Induktion), daß für alle $x, \lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x^{n+1} - \lambda^{n+1} = (x - \lambda)(x^n + x^{n-1}\ \lambda + \cdots + x\ \lambda^{n-1} + \lambda^n).$$

4. Die Polynomfunktionen $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ mit reellen Koeffizienten bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man bestimme eine maximale linear unabhängige Liste von Polynomfunktionen aus der Menge

$$\{2, 3x - 1, -x(x - 1), 4x^2, \frac{1}{2}x(x - 1)(x - 2), 5x^3 + 2x + 1\}.$$

5. Man beweise: die Polynomfunktionen $(\mathrm{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ bilden einen kommutativen Ring mit 1-Element.

6. Seien $b_1, \ldots, b_m$ mit $m \leq n$ verschiedene, paarweise orthogonale Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Man zeige: Sind alle b_i ungleich dem Nullvektor, dann sind die Vektoren $(b_1, \ldots, b_m)$ linear unabhängig.