12. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{P}_m(\mathbb{R})$ die Menge der reellen Polynomfunktionen vom Grad $\leq m$. Man beweise: (a) $\mathrm{P}_m(\mathbb{R})$ mit Addition und Skalarmultiplikation wie in $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. (b) Die Abbildung $\mathrm{P}_m(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_{m-1}(\mathbb{R})$ mit

$$c_m\, x^m + \ldots + c_1\, x + c_0 \mapsto m\, c_m\, x^{m-1} + \ldots + 2c_2\, x + c_1$$

ist linear. (c) Die Abbildung $\mathrm{P}_{m-1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_m(\mathbb{R})$ mit

$$c_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + c_1\, x + c_0 \mapsto c_{m-1}/m\, x^m + \ldots + c_1/2\, x^2 + c_0\, x$$

ist linear.

2. Aus $0 = \det \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ folgere mit Hilfe der Determinantenregeln (D1) und (D2):

$$\det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (a_{ij}(n)) \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit $a_{ij}(n) = 0$ für $i = j$ und $a_{ij}(n) = 1$ für $i \neq j$. (a) Mittels Laplace-Entwicklung berechne man $\det A_n$ für $1 \leq n \leq 4$. (b) Man finde eine Formel für $\det A_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

4. Warum gilt $\det A = 0$ für beliebige Wahl der $a_{ij} \in \mathbb{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

5. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(a) Man schreibe σ in Zyklen- und in Matrix-Notation. (b) Man stelle σ als Produkt von Transpositionen dar und bestimme $\mathrm{sign}(\sigma)$. (c) Man berechne σ^{-1}, σ^3 und σ^6. (d) Man bestimme die Anzahl der Inversionen von σ, σ^{-1}, σ^3 und σ^6.