13. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(a) Man stelle σ als Produkt von Transpositionen dar und bestimme $\operatorname{sign}(\sigma)$. (b) Man berechne σ^{-1}, σ^3 und σ^6. (c) Man bestimme die Anzahl der Inversionen von σ, σ^{-1}, σ^3 und σ^6.

2. Eine Familie $(A_n)_{n\geq 1}$ von $n \times n$ Matrizen sei wie folgt definiert: auf der Hauptdiagonale und den zwei Nebendiagonalen steht jeweils der Wert 1, auf den anderen Plätzen der Wert 0. D.h.:

$$A_1 = (1),\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

(a) Man leite eine Rekursion für $(\det(A_n))_{n\geq 1}$ her. (b) Man bestimme $\det(A_{100})$.

3. (a) Man verifiziere:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(b) Man versuche das Muster auf den 4×4 Fall zu verallgemeinern.

4. Sei $A_n = (a_{ij}(n)) \in \mathrm{M}(n \times n; K)$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch $a_{ij}(n) := i + j$. (a) Man berechne die Determinanten $\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4)$. (b) Man stelle eine allgemeine Formel für $\det(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, auf.

5. Man beweise: Für $n \geq 3$ ist $(S_n, \circ)$ eine nicht-abelsche Gruppe. ("$\circ$" ist die Komposition/Hintereinanderausführung von Funktionen.)

6. Sei K ein Körper und

$$H(K) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}.$$

Man beweise: $(H(K), \cdot)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe. ("$\cdot$" ist die Matrix-Multiplikation.)