2. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1.) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 4,\ 2x - 2y = 4$$

(über $\mathbb{R}$) analog wie in der Vorlesung mittels Matrizen-Rechnung.

2.) Sei $C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Für alle $(x, y), (u, v) \in C$ sei $(x, y)+(u, v) := (x + u, y + v)$ und $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$. Man zeige: diese Operationen $+, \cdot : C \times C \to C$ erfüllen die Körperaxiome (K3), (K4) und (K5). — Vorausgesetztes Wissen: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper; d.h., in $\mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln (K1) – (K5) und (Ka) – (Ke).

3.) Sei $\mathbb{R}^2 := \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und $\lambda \cdot (a_1, a_2) := (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2)$. Man überprüfe, daß für $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ die Vektorraum-Axiome (V1)(a) – (V1)(d) erfüllt sind. — Vorausgesetztes Wissen: wie im Beispiel 2.

4.) Mit den Voraussetzungen wie im Beispiel 3 zeige: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ erfüllt die Vektorraum-Axiome (V2)(a) – (V2)(d).

5.) Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$. Man beweise die Gültigkeit einer der Rechenregeln (Va) – (Ve) als Konsequenz der Vektorraumaxiome (V1) und (V2).

6.) Sei $\dot\vee$ die Wahrheitsfunktion des "ausschließenden Oder". Man überprüfe mittels Wahrheitstafeln, ob für alle $x, y, z \in \{W, F\}$ gilt:

$$x \wedge (y \,\dot\vee\, z) = (x \wedge y) \,\dot\vee\, (x \wedge z).$$