4. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Aus den Definitionen $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$ und $A = B :\Leftrightarrow A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ beweise man: Für beliebige Mengen A, B, C gilt:

$$\text{wenn } A = B \text{ und } B = C, \text{ dann } A = C.$$

2. In einem Hörsaal befinden sich 100 Studentinnen. Jede Studentin studiert entweder Mathematik oder Physik, aber nicht beides. Zumindest eine Studentin ist Physikerin. Von jeweils zwei Studentinnen ist wenigstens eine Mathematikerin. Wieviele Studentinnen studieren Mathematik bzw. Physik? (Formalisieren Sie die Situation und versuchen Sie, die Formalisierung im Beweis zu verwenden.)

3.) Man beschreibe die Menge $\{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42\}$ mittels Mengenbildung durch: (a) "Angabe einer charakterischen Eigenschaft", (b) "Angabe eines erzeugenden Terms".

4.) Man finde Bedingungen für reelle Zahlen y_1, y_2, y_3, sodaß die Punkte $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ und $(2, y_3)$ auf einer Geraden liegen.

5. Man beweise durch Zurückführung auf Gesetze der Aussagenlogik: Für beliebige Mengen A, B, C gilt

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

6. Man beweise durch Zurückführung auf Gesetze der Aussagenlogik: Für beliebige Mengen $A \subseteq U$ gilt

$$U \setminus (U \setminus A) = A.$$

7. (a) Sei $\mathbb{R}^- := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$. Man finde ein Beispiel für eine Relation R von $\mathbb{R}^-$ nach $\mathbb{R}$, welche keine Funktion ist. Man bestimme die inverse Relation R^{-1}.
(b) Man finde jeweils ein Beispiel für eine (i) injektive, (ii) surjektive, und (iii) bijektive Funktion von $\mathbb{R}^-$ nach $\mathbb{R}$.