6. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Sei $f : A \to B$. Man beweise:
(a) f ist bijektiv genau dann, wenn für ein $g : B \to A$:

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

(b) Falls so ein g existiert, dann ist g bijektiv und eindeutig bestimmt.

2. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Bijektionen. Man zeige: (a) $g \circ f : A \to C$ ist eine Bijektion. (b) $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$. (c) $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_C$.

3. Sei U eine Menge. Für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq U$ sei $A \approx B :\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $f : A \to B$. Man zeige: $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $P(U)$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, aber beliebig. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a \sim b :\Leftrightarrow n \mid a - b$. Man verifiziere: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

5. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A und $a, b \in A$ beliebig. Man zeige:
(a) $a \sim b$ genau dann, wenn $K(a; \sim) = K(b; \sim)$.
(b) $a \not\sim b$ genau dann, wenn $K(a; \sim) \cap K(b; \sim) = \emptyset$.

6. Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige für $\approx$ wie im Beispiel 3 ($U = \mathbb{N}$):

$$\{1, 2, \ldots, m\} \approx \{1, 2, \ldots, n\} \text{ genau dann, wenn } m = n.$$

7. Für die Punkte des $\mathbb{R}^2$ sei folgende Äquivalenzrelation definiert: $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow (a_1, a_2)$ und (b_1, b_2) liegen auf derselben Geraden mit Steigung 1. Man beschreibe die Äquivalenzrelation mittels einer geeigneten Funktion f, sodaß $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \Leftrightarrow f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2)$. Außerdem gebe man ein Repräsentanten-System für die Äquivalenzklassen an.