7. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Bezüglich $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ sei die Relation $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2)$ für alle Punkte des $\mathbb{R}^2$ definiert. Warum ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation? Man gebe eine geometrische Interpretation der Äquivalenzklassen. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es? Man wähle ein geeignetes Repräsentanten-System.

2. Sei $Q := \{(a,b) : (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ und } b \neq 0\}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß durch $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ eine Äquivalenzrelation auf Q definiert ist. Für $(a_i, b_i) \in Q$ und $q_i := K((a_i, b_i); \sim)$, $i \in \{1,2\}$, sei $q_1 + q_2 := K((a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2); \sim)$. Man zeige, diese Definition der Addition in $Q/\sim$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. D.h., falls $(a_i, b_i) \sim (a_i^{'}, b_i^{'})$, $i \in \{1,2\}$, dann gilt

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2) \sim (a_1^{'} b_2^{'} + a_2^{'} b_1^{'}, b_1^{'} b_2^{'}).$$

3. Sei Q mit $\sim$ wie im Beispiel 2. Für alle $q_1 = (a_1, a_2)$, $q_2 = (b_1, b_2) \in Q$ sei $q_1 \cdot q_2 := (a_1 b_1, a_2 b_2)$. Das induziert eine Multiplikation in $Q/\sim$: für alle $q_1, q_2 \in Q$ sei $K_{q_1} \cdot K_{q_2} := K_{q_1 \cdot q_2}$. Man zeige, diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. D.h., es gilt für alle $q_1, q_1^{'}, q_2, q_2^{'} \in Q$:

$$(K_{q_1} = K_{q_1^{'}}) \text{ und } (K_{q_2} = K_{q_2^{'}}) \text{ impliziert } K_{q_1 \cdot q_2} = K_{q_1^{'} \cdot q_2^{'}}.$$

4. Gegeben $x \in \mathbb{Z}$. Für die Elemente aus $\mathbf{N}_0^2$ sei folgende Relation definiert: $(a,b) \sim (c,d)$ genau dann, wenn $d = x(c-a) + b$ über $\mathbb{Z}$ gilt. Für welche $x \in \mathbb{Z}$ ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

5. Sei R die Teiler-Relation auf $\mathbb{N}$, d.h., für alle $a, b \in \mathbb{N}$ sei $a \sim b :\Leftrightarrow a$ teilt b. (a) Man zeige: R ist eine Ordnungsrelation. (b) Ist R linear? (c) Man zeichne das Hasse-Diagramm von $\{1, 2, \ldots, 24\}$ bezüglich der Teiler-Relation.

6. Man finde zwei verschiedene lineare Ordnungsrelationen auf $\mathbb{R}^2$.

7. Seien $A = v + \mathbf{R}w$ und $A' = v' + \mathbf{R}w'$ nicht-parallele Geraden im $\mathbf{R}^n$. Falls es ein $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $w' = \mu w$, gilt dann $A = A'$? (Beweis oder Gegenbeispiel.)