8. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Man verifiziere: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u, w\rangle$.

(b) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2$.

2. Sei $A = v + \mathbb{R}w$ eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Man beweise:

s ist orthogonal zu A genau dann, wenn $\langle s, w\rangle = 0$.

3. Man beweise: Sei $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } a\,x + b\,y = c\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, dann ist (a, b) orthogonal zu A.

4. Sei A diejenige Gerade im $\mathbb{R}^2$, welche durch die Punkte $v = (-2, 2)$ und $v' = (4, -4)$ geht. Man beschreibe A durch:

(a) Parameter-Darstellung, (b) $ax + by = c$, (c) Hesse-Normalform.

5. Angenommen, die Punkte $h_1 := (0, 0, 0), h_2 := (1, 1, 0), h_3 := (1, 0, 1)$ und $h_4 := (0, 1, 1)$ eines regelmäßigen Tetraeders entsprechen den H-Atomen des Moleküls CH_4. Das C-Atom sitzt im Zentrum $c := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wie lang sind die Kanten des Tetraeders? Wie groß sind die Winkel zwischen den gerichteten Strecken (c, h_i) und (c, h_j) für $i \neq j$?

6. Welches Vielfache des Vektors $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $w = (2, 4, 4)$? Welcher Punkt auf der Geraden durch $(0, 0, 0)$ und $(2, 4, 4)$ ist dem Punkt $(1, 1, 1)$ am nächsten?