9. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Man finde zwei verschiedene Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$, sodaß diese mit $v = (4,2,4)$ den Winkel $\pi/3$ einschließen.

2. Sei E diejenige Ebene im $\mathbb{R}^3$, welche durch die Punkte $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,0,2)$ und $v_3 = (1,3,4)$ bestimmt wird. Gilt $(0,0,0) \in E$? Man beschreibe E durch: (a) Parameter-Darstellung, (b) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$, (c) Hesse-Normalform.

3. Seien v_1, v_2, v_3 und E wie im Beispiel 2. (a) Man berechne die Abstände der Punkte $w_1 = (2,5,6)$ und $w_2 = (2,5,7)$ von der Ebene E. (b) Welcher Vektor $v_i \in \{v_1, v_2, v_3\}$ kann als Linearkombination der beiden anderen dargestellt werden?

4. Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (2,4,-2)$, $v_2 = (1,-6,7)$ und $v_3 = (1,0,2)$ im $\mathbb{R}^3$. Man beweise: $\mathbb{R}^3$ ist die lineare Hülle $L(v_1, v_2, v_3)$ von (v_1, v_2, v_3).

5. Die Polynome mit reellen Koeffizienten bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man bestimme eine maximale linear unabhängige Liste von Polynomen aus der Menge

$$\{2, 3x-1, -x(x-1), 4x^2, \frac{1}{2}x(x-1)(x-2), 5x^3+2x+1\}.$$

6. Welche der Funktionen

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x-2z, 3y-z)$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (2x+3y-z, x^2-y+z)$

ist linear bzw. nicht linear? (Beweis oder Gegenbeispiel.)