Übungsblatt 1

Besprechung am **10.10.2013**

Aufgabe 1 Übersetzen Sie die folgenden natürlichsprachlichen Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik; definieren Sie hierzu, wo notwendig, passende Grundprädikate!

a) Wenn x kleiner und z größer ist als y, dann ist auch x kleiner als z.

b) Wenn alle Katzen gelbe Augen haben, dann hat auch meine Katze gelbe Augen.

c) Drei ist die kleinste ungerade Primzahl.

Aufgabe 2 Wir betrachten die folgenden beiden Aussagen:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : x < y,$$
$$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y.$$

a) Sind diese Aussagen wahr? Geben Sie jeweils einen formalen Beweis an!

b) Ändern sich die Aussagen, wenn man die Quantoren vertauscht?

c) Negieren Sie beide Aussagen (die Negation ist dabei bis in die innersten Komponenten der Formel zu ziehen)!

d) Schreiben Sie die Aussagen so um, dass hinter jedem Quantor nur eine Variable steht (also z.B. $\forall x : \ldots$).

Aufgabe 3 Bringen Sie die folgenden Formeln in *Pränexform*, d.h. in die Form $Q_1 v_1 \ldots Q_n v_n F$, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und F eine Formel ist, in der keine Quantoren vorkommen. Sie dürfen hierzu Variable umbennen, achten Sie allerdings darauf, dass die Anzahl der quantifizierten Variablen im Resultat minimal ist. *Hinweis:* Verwenden Sie $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$.

a) $\big((\exists x : A(x)) \implies \forall x : B(x)\big) \implies \exists x : C(x)$

b) $\big((\forall x : A(x)) \implies \exists x : B(x)\big) \implies \forall x : C(x)$

Aufgabe 4 Beweisen Sie die folgenden Aussagen (logische Äquivalenz bzw. Mengengleichheit) mittels gegenseitiger Implikation bzw. Inklusion:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : 6 \mid x \iff 2 \mid x \wedge 3 \mid x$

b) $\mathbb{Z} = \{2n + p : n \in \mathbb{Z} \wedge \text{prim}(p)\}$

Aufgabe 5 Verschaffen Sie sich Zugang zu einer lauffähigen Installation des Computeralgebrasystems Sage (`http://www.sagemath.org`). Machen Sie sich mit der Benutzeroberfläche, der Dokumentation und der Syntax von Sage vertraut!