Übungsblatt 10

Hinweis: Die Lösungen sind schriftlich auszuarbeiten und am **9.1.2014** abzugeben.

Aufgabe 1 Folgen und Reihen

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^5}.$$

b) Für welche x konvergieren jeweils die folgenden Reihen?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt[6]{n^5}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)\mathrm{e}^{x+n}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{n!}x^n,$$

wobei $f(n)$ wie folgt definiert ist: $f(n) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ ein Teiler von 96 ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 2 Wir wollen die Taylorreihe der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2x^2-3x+1}$$

um den Entwicklungspunkt $x = 0$ studieren.

a) Berechnen Sie zunächst die ersten vier Terme der Taylorreihe von $f(x)$, d.h. das Taylorpolynom dritten Grades, mit Hilfe der Formel von Taylor (Satz 22).

b) Überlegen Sie sich nun, wie Sie das Taylorpolynom von f ohne Differenzieren erhalten können, und leiten Sie eine rekursive Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten der Taylorreihe her! Berechnen Sie damit ein paar weitere Terme der Taylorreihe. Wie lautet die Rekursionsformel für allgemeine rationale Funktionen?
Hinweis: Machen Sie einen Ansatz $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ mit unbestimmten Koeffizienten c_i und multiplizieren Sie dann mit dem Nenner!

c) Finden Sie eine geschlossene Formel, die den n-ten Taylorkoeffizienten c_n angibt! Ermitteln Sie dazu die beiden reellen Zahlen r_1 und r_2, so dass r_1^n und r_2^n Lösungen der in b) gefundenen Rekursionsformel sind.

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von f.

Aufgabe 3 Mit Hilfe der Monotonie, Extremstellen, Wendepunkte, Konvexität/Konkavität, Nullstellen und der Grenzwerte an den Randpunkten des Definitionsbereiches kann ein sehr anschauliches Bild einer (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion gewonnen werden. Berechnen Sie die entsprechenden Daten und erstellen Sie anhand dieser eine Handskizze der folgenden Funktionen.

a) $f\colon [-4,4]\setminus\{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{(x+3)\,\mathrm{e}^{1-x}}{x-3}$

b) $g\colon [-2\mathrm{e}^{-1},\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = (x+1)^{-x-1}$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die Fläche, welche

- zwischen den Graphen der folgenden zwei Funktionen eingeschlossen wird;
- oberhalb der x-Achse liegt und durch die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ begrenzt wird.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x-1}$

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2\,(x+2)^2\,\mathrm{e}^{-x}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| = 1, \\ (x^2-1)^{-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3\,(x^2-1)$

Hinweis: Die Stammfunktion von $(x^2-1)^{-1}$ lautet $\frac{1}{2}\big(\log(1-x) - \log(1+x)\big)$.

Aufgabe 5 Mehrdimensionale Integrale

a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2\int_0^x\int_0^{x-y} y\,e^z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

b) Berechnen Sie das Volumen der parabolischen Kuppel $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ über dem Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$.

c) Berechnen Sie das Volumen des von der Fläche $f(x,y) = 6-x-y$ begrenzten Körpers über dem Bereich, der von der y-Achse und den Geraden $x+y = 6$ und $x+3y = 6$ eingeschlossen wird.

d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ x^2+y^2 \le z^2\big\}$. Um welchen Körper handelt es sich? Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 6 Die Gesamtmasse M eines dünnen, ebenen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kann durch das Integral der Dichtefunktion $\rho(x,y)$ über dem Bereich K berechnet werden:

$$M = \int_K \rho(x,y) d(x,y).$$

Der Schwerpunkt (x_S, y_S) von K kann durch folgende Gleichungen berechnet werden:

$$x_S = \frac{1}{M}\int_K x\,\rho(x,y)d(x,y), \qquad y_S = \frac{1}{M}\int_K y\,\rho(x,y)d(x,y).$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt, die Gesamtmasse und den Schwerpunkt folgender ebener Körper im $\mathbb{R}^2$ mit gegebener Dichtefunktion:

a) $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 4\big\},\ \rho(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Koordinatentransformation.

b) $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\big\},\ \rho(x,y) = c,\ c \ge 0$.

Hinweis: Führen Sie elliptische Koordinaten $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \phi \le \pi$ ein, berechnen Sie die Jacobimatrix und verwenden Sie die Substitutionsregel.