Übungsblatt 4

Besprechung am **31.10.2013**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie mithilfe der Kriterien aus der Vorlesung, welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2+n}\frac{1}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3n+4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n.$$

Aufgabe 2 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie – etwa anhand eines Gegenbeispiels – die folgenden Aussagen:

a) $\left(\exists a \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

b) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right) \Rightarrow \left(\exists a \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a\right)$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie mithilfe der Kriterien aus der Vorlesung, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \sin(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} x^n.$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie den Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q| < 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Formel für die endliche geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie Funktionen in Sage, die Näherungen für die Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion berechnen, indem sie die Reihendarstellung aus Definition 8 nach N Schritten abbrechen.

Testen Sie Ihre Funktionen für $x = 0.00001$, 1.5, 1000.5 und verschiedene N. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten, die die Sage-Funktionen exp, sin und cos liefern.