Übungsblatt 5

Besprechung am **14.11.2013**

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit!

a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = (x^2+1)\sin\big(\exp(x^2)+\cos(2x)\big)$

b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = -1, \\ \frac{x^2-1}{x^2+x}, & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f_3\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$

d) $f_4\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 2 In Satz 10 der Vorlesung wurde behauptet: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, dann ist auch $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x))$ stetig. Beweisen Sie dies!

Aufgabe 3 Zeigen Sie zunächst, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$. In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs ist die Umkehrfunktion des Sinus (die sogenannte Arkussinus-Funktion)

$$f\colon \big[0,1\big] \to \big[0,\tfrac{\pi}{2}\big], \quad f(x) = \sin^{-1}(x) =: \arcsin(x)$$

stetig und in welchen differenzierbar? Leiten Sie außerdem eine Formel für die erste Ableitung des Arkussinus her!

Aufgabe 4 Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \log(\log(x)), \qquad f_2(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}, \qquad f_3(x) = 2^{\sqrt{x}}, \qquad f_4(x) = x^x.$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie das auf dem Zwischenwertsatz basierende Bisektionsverfahren zur Approximation einer Nullstelle in Sage. Gegeben sind eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sodass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen. In jedem Schritt wird das Intervall halbiert und in jener Hälfte des Intervalls weitergesucht, bei dem f angewandt auf die beiden Grenzen des Intervalls unterschiedliche Vorzeichen ergibt. Unterschreitet die Länge des Intervalls einen bestimmten Wert (z.B. 10^{-10}), wird das Verfahren abgebrochen und der Mittelpunkt des aktuellen Intervalls als Ergebnis ausgegeben. Sollte bei einem Zwischenschritt eine Grenze des Intervalls bereits Nullstelle sein, wird diese Grenze natürlich unmittelbar als Ergebnis ausgegeben.
Testen Sie ihr Programm für die Funktion $\cos(x)$ und das Startintervall $[0,2]$ sowie für mindestens zwei weitere Funktionen.