Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2013**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2013/analysis/

Übungsblatt 9

Besprechung am **12.12.2013**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der unten angegebenen Funktion f bis zur zweiten Ordnung und geben Sie die Hessematrix $H_f(x,y)$ an. Bestimmen Sie weiters das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von $H_f(x,y)$.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf totale Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2+y^2$,

c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} -x+y, & \text{falls } xy \geq 0 \\ x+y-1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Extremwerte der Funktionen

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -x^3+12xy-y^3$,

b) $f_2\colon (-1,1)\times(-1,1) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{2xy}{(2-x)(2+y)}$.

Aufgabe 4 Dem Einheitskreis ist ein Dreieck ABC mit größtem Flächeninhalt einzuschreiben. Wir nehmen an, dass der Eckpunkt A die Koordinaten $(1,0)$ hat. Die Eckpunkte B und C werden folgendermaßen angesetzt:

$$B = (\cos x, \sin x), \quad C = (\cos y, \sin y), \quad -\pi < x, y \leq \pi.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist dann durch folgende Funktion $f\colon (-\pi,\pi]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\sin y\,(\cos x - 1) - \sin x\,(\cos y - 1)\big).$$

Berechnen Sie damit den maximalen Flächeninhalt und die Eckpunkte B und C.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Gradientenverfahren zum Auffinden lokaler Minima einer bivariaten Funktion $f(x,y)$ in Sage. Ähnlich einem Bergsteiger, der auf schnellstem Wege das Tal erreichen möchte, folgt dieses Verfahren dem steilsten Abstieg, um zu einem Minimum zu gelangen. Gestartet wird von einem vorgegebenen Punkt (x_0,y_0); der negative Gradient $-\nabla f(x_0,y_0)$ gibt die Richtung des steilsten Abstieges an. Man folgt nun dieser Richtung (z.B. in kleinen Schritten von konstanter vorgegebener Schrittlänge), solange die Funktionswerte kleiner werden, und gelangt zum Punkt (x_1,y_1). Hier wird erneut der Gradient berechnet und wie zuvor fortgefahren. Testen Sie Ihr Programm an folgenden Beispielen:

a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $(x_0,y_0) = (1,1)$,

b) $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$, $(x_0,y_0) = (-0.5, 0.5)$.