Analysis 326.022 · Winter 2013/2014 · **Zweite Vorlesungsklausur** 23.04.2014

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Wahr oder falsch?

a) Jede konvergente Folge ist beschränkt

b) Jede beschränkte Folge ist konvergent

c) Jede monotone Folge ist beschränkt

d) Jede beschränkte Folge ist monoton

e) Jede monotone Folge ist konvergent

f) Jede konvergente Folge ist monoton

Lösung. a) wahr, b) falsch, c) falsch, d) falsch, e) falsch, f) falsch.

Aufgabe 2 Zur Erinnerung: eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heisst *beschränkt,* falls gilt

$$\exists\ M \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(\frac{1}{n+1})_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt.

Lösung. Zu zeigen: $\exists\ M \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : |\frac{1}{n+1}| \leq M$. Wähle $M = 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu zeigen ist: $|\frac{1}{n+1}| \leq 1$. In der Tat gilt $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$ und $n+1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} > 0$. Daraus folgt $-1 \leq 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$, und also $|\frac{1}{n+1}| \leq 1$, wie behauptet.

Aufgabe 3 Zur Erinnerung: Satz 20 aus der Vorlesung lautete wie folgt.

> Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, streng monoton und in $x_0 \in D$ differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $y_0 = f(x_0)$ und es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Betrachten Sie die Funktion $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Leiten Sie mit Hilfe des Satzes eine Formel für die Ableitung von f^{-1} her. Begründen Sie dazu auch kurz, warum der Satz überhaupt anwendbar ist, d.h. dass f alle genannten Voraussetzungen erfüllt.

Lösung. $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist ein offensichtlich Intervall. Die Funktion f ist stetig, weil sie durch eine Potenzreihe definiert ist. (Alternativ: Die Stetigkeit von sin ist aus der Vorlesung bekannt.) Für $x \in D$ gilt $f'(x) = \cos(x) > 0$. Damit ist f auf D streng monoton und es gilt $f'(x) \neq 0$ für jedes $x \in D$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt.

Für $x_0 \in D$ und $y_0 = \sin(x_0)$ gilt nach dem Satz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}},$$

unter Verwendung von $\sin(x_0)^2 + \cos(x_0)^2 = 1$ und $\cos(x_0) > 0$.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ auf Extremstellen.

Lösung. Es gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x \exp(x^2 + y^2), 2y \exp(x^2 + y^2)) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$. Damit kann höchstens im Punkt $(0, 0)$ ein Extremum vorliegen. Dort gilt $H_f(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, also $\det(H_f(0, 0) - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 2 > 0$. Damit liegt im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 5 Sei $\gamma\colon [0,\frac{4}{3}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2\sin(2t), t^2\cos(2t))$. Berechnen Sie die Länge von γ.

Lösung. Wegen $\gamma'(t) = (2t\sin(2t) + t^2\cos(2t)2, 2t\cos(2t) - t^2\sin(2t)2)$ gilt

$$\begin{aligned}
||\gamma'(t)|| &= \sqrt{(2t\sin(2t) + 2t^2\cos(2t))^2 + (2t\cos(2t) - 2t^2\sin(2t))^2} \\
&= \sqrt{4t^2\sin(2t)^2 + 8t^3\sin(2t)\cos(2t) + 4t^4\cos(2t)^2 +} \\
&\qquad \overline{+ 4t^2\cos(2t)^2 - 8t^3\sin(2t)\cos(2t) + 4t^4\cos(2t)^2} \\
&= \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Damit: $L(\gamma) = \int_0^{4/3} ||\gamma'(t)||dt = \int_0^{4/3} 2t\sqrt{t^2+1}dt = \left[\frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2}\right]_{t=0}^{4/3} = \frac{2}{3}(\frac{16}{9}+1)^{3/2} - \frac{2}{3}1^{3/2} = \frac{2}{3}(\frac{25}{9})^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\frac{5^3}{3^3} - 1) = \frac{2}{3}(\frac{125}{27} - \frac{27}{27}) = \frac{2}{3}\,\frac{98}{27} = \frac{196}{81}$.
Die Stammfunktion findet man durch Substitution: $2t\sqrt{t^2+1} = g'(t)f(g(t))$ für $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(t) = t^2 + 1$.