2 Die Algebra der Matrizen

Ein Hauptziel der Vorlesung zur Linearen Algebra besteht darin, Aussagen über die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme zu machen. Etwa ob das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

eine Lösung hat. Dabei ist es natürlich unerheblich, wie wir die Variablen nennen, sie sind in gewisser Weise nur Platzhalter. Wesentlich ist nur das System der Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichungen, und die Werte auf der rechten Seite. Solche Systeme von Koeffizienten und rechten Seiten schreiben wir als rechteckige Systeme von Zahlen, sogenannte Matrizen. Mit Matrizen lässt sich hervorragend rechnen und auf diese Weise die Lösungen des Gleichungssystemes gestimmen.

2.1 Was sind Matrizen?

In diesem ganzen Abschnitt 2.1 sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

Definition 2.1.1: *Seien m und n positive ganze Zahlen. Eine* **Matrix** *A mit m* **Zeilen** *und n* **Spalten**, *oder kurz eine $m \times n$ Matrix,* **über** *R ist ein rechteckiges Schema von Elementen von R der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Das Element a_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A nennen wir oft auch das (i, j)-te Element von A. [1]
Die Menge der $m \times n$ Matrizen über R bezeichnen wir mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ oder – wenn R aus dem Kontext klar ist – einfach mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}$.
Elemente $a \in \mathrm{Mat}_{1\times n}$ oder $b \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}$ heissen **Vektoren**. *a ist ein* **Zeilenvektor**, *b ist ein* **Spaltenvektor**.
$m \times n$ heisst die **Dimension** *der Matrix A.* □

Oft bezeichnen wir eine Matrix A wie in der Definition einfach als

$$(a_{ij})_{m\times n} .$$

Beispiel 2.1.2: Wir betrachten Matrizen über $\mathbb{R}$.
(i) Die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix}$$

[1] Streng formal könnten wir eine $m\times n$ Matrix definieren als eine Funktion $A : \{1, \ldots, m\}\times\{1, \ldots, n\} \to R$. Das Element a_{ij} ist dann einfach $A(i, j)$. Wir werden aber im folgenden dennoch die eher informalen Begriffe aus Definition 2.1.1 verwenden.

kann auch geschrieben werden als $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ mit $a_{ij} = i^j$.
(ii) Die variable 3×3 Matrix

$$B = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

kann auch geschrieben werden als $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} x & \text{falls } i \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) Die $n \times n$ Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e^2 & e & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{n-1} & e^{n-2} & e^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

kann auch geschrieben werden als $C = (c_{ij})_{n\times n}$ mit

$$c_{ij} = \begin{cases} e^{i-j} & \text{falls } i \geq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iv) Das **Kroneckersymbol** δ_{ij} (für $i, j \in \mathbb{N}$) ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix

$$I_m \;=\; \big(\delta_{ij}\big)_{m\times m} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}_{m\times m}$$

heisst die $(m \times m)$-**Identitäts-** oder **Einheitsmatrix**. □

Bisher ist $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ nur eine Menge. Um sie zu einer Algebra zu machen, definieren wir Operationen $+$ und $\cdot$ für Matrizen und auch eine Skalarmultiplikation mit Elementen aus R. Elemente auf dem zugrundeliegenden Körper (hier R) heissen auch **Skalare**.

Definition 2.1.3: *Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$. Die* **Summe** *$A + B$ der Matrizen A und B ist die Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ mit*

$$\forall i, j : \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; .$$ □

Beispiel 2.1.4: In $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ gilt etwa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \; .$$ □

Satz 2.1.5: *In $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ gilt:*

(i) $+$ *ist kommutativ, also* $\quad \forall A, B: \ A + B = B + A$.

(ii) $+$ *ist assoziativ, also* $\quad \forall A, B, C: \ A + (B + C) = (A + B) + C$. □

Wegen Satz 2.1.5(ii) schreiben wir einfach $A+B+C$ statt $A+(B+C)$ oder $(A+B)+C$.

Satz und Definition 2.1.6: *Sei* $N = (n_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ *mit* $n_{ij} = 0$ *für alle* i, j. *Dann gilt für alle* $m \times n$ *Matrizen* A*:* $A + N = A$. N *ist die einzige Matrix in* $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ *mit dieser Eigenschaft.* N *heisst die* $m \times n$ **Nullmatrix**, *auch geschrieben als* $0_{m\times n}$ *oder einfach* 0. □

Satz und Definition 2.1.7: *In* $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ *gibt es für jede Matrix* $A = (a_{ij})$ *eine eindeutig bestimmte Matrix* $B = (b_{ij})$*, sodass* $A + B = 0_{m\times n}$. *Für diese Matrix* B *gilt:* $\forall i, j: \ b_{ij} = -a_{i,j}$. B *heisst die* **additive Inverse** *von* A*, und wir schreiben sie auch als* $-A$. □

Ebenso wie bei Zahlen schreiben wir meist $A-B$ statt $A+(-B)$. Die binäre Operation "$-$" heisst **Subtraktion**.

Definition 2.1.8: *Sei* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *eine Matrix über* R *und* $\lambda \in R$. *Das* **Skalarprodukt** *von* A *und* λ, λA, *ist definiert wie folgt:*

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{m\times n} \ .$$ □

Satz 2.1.9: *Seien* $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ *und* $\lambda, \mu \in R$. *Dann gilt:*

(i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

(iii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,

(iv) $(-1)A = -A$,

(v) $0A = 0_{m\times n}$. □

Definition 2.1.10: *Seien* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ *und* $B = (b_{jk}) \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$. *Das* **Produkt** $A \cdot B$ *von* A *und* B *ist die Matrix* $C = (c_{ik}) \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$ *mit*

$$\forall i, k: \ c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \ .$$ □

Die Operation $\cdot$ *heisst* **Multiplikation**.

Ebenso wie bei Zahlen schreiben wir ein Produkt $A \cdot B$ oft einfach als AB. Man beachte, dass Matrizen A und B nur dann multipliziert werden können, wenn A soviele Spalten hat wie B Zeilen hat. Insbesondere folgt aus der Multiplizierbarkeit von A und B nicht, dass auch B und A multipliziert werden können.

Beispiel 2.1.11: Seien A und B die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

A und B können multipliziert werden (A hat soviele Spalten wie B Zeilen hat), und wir erhalten dabei die folgende 2×2 Matrix:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

In diesem speziellen Fall können wir auch B und A (in dieser Reihenfolge) multiplizieren, erhalten dabei aber die folgende 3×3 Matrix:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Beispiel 2.1.12: Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Produkte $AB = 0_{2\times 2}$ und $BA = A$. □

Satz 2.1.13: *Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, falls sie überhaupt definiert ist. Also für $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ gilt:*

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}, C \in \mathrm{Mat}_{p\times q} : \ A(BC) = (AB)C . \qquad \square$$

Wegen Satz 2.1.13 schreiben wir einfach ABC statt $A(BC)$ oder $(AB)C$. Weiters schreiben wir A^n statt $AA \cdots A$ (n mal). Dabei ist $A^0 = I$ (das neutrale Element bzgl. der Matrizenmultiplikation, wie wir gleich sehen werden).

Satz 2.1.14: *Die Matrizenmultiplikation ist distributiv bzgl. der Matrizenaddition. Also wenn die folgenden Summen und Produkte definiert sind, dann gilt*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC . \qquad \square$$

Die Skalarmultiplikation kann in ein Matrizenprodukt hineingezogen werden.

Satz 2.1.15: *Ist das Produkt AB definiert, dann gilt für alle $\lambda \in R$:*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) . \qquad \square$$

Definition 2.1.16: *Eine Matrix A heisst* **quadratisch**, *wenn sie gleich viele Zeilen wie Spalten hat, also wenn $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$.* □

Satz und Definition 2.1.17: *Sei $I_n = (\delta_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ wie in Beispiel 2.1.2(iv). Dann gilt für alle $n \times n$ Matrizen A: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. I_n ist die einzige Matrix in $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ mit dieser Eigenschaft. I_n heisst die $(n \times n)$-***Einheitsmatrix** *oder* **Identitätsmatrix**. *Ist n aus dem Kontext klar, so schreiben wir statt I_n auch einfach I.* □

Aus den obigen Sätzen können wir sehen, dass $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ein Ring mit Einselement ist. Dieser Ring ist aber nicht kommutativ und er enthält Nullteiler (vgl. Beispiel 2.1.12).

Satz 2.1.18: *Die Menge der quadratischen Matrizen* $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ *mit den Operationen "+" und "·" bildet einen Ring. Dieser Ring ist nicht kommutativ und enthält Nullteiler.*

Definition 2.1.19: *Wir sagen, dass die beiden Matrizen A und B* **kommutieren**, *wenn gilt $AB = BA$.*

Beispiel 2.1.20: Nicht nur ist $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ nicht-kommutativ und enthält Nullteiler. Es treten auch noch andere (etwa in Zahlenbereichen) ungewöhnliche Eigenschaften auf. Ist etwa R ein Körper, so gilt für jeden Skalar $\lambda \in R^*$

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} = I_2 \ .$$

I_2 hat also unendlich viele Quadratwurzeln, falls R ein unendlicher Körper ist. □

In I_n steht an jeder Position in der Diagonale 1, und an jeder Position ausserhalb der Diagonale 0. Solche speziellen Matrizen, welche nur in der Diagonale von 0 verschieden sind, spielen in der Linearen Algebra eine wichtige Rolle.

Definition 2.1.21: *Eine quadratische Matrix $D = (d_{ij})_{n\times n}$ heisst* **Diagonalmatrix**, *wenn $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.* □

Definition 2.1.22: *Ist A eine $m \times n$ Matrix, dann ist die* **Transponierte** *A^T von A die $n \times m$ Matrix, deren (i, j)-tes Element das (j, i)-te Element von A ist. Ist also*

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \ ,$$

dann ist

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m} \ .$$

□

Satz 2.1.23: *Wenn die jeweiligen Summen und Produkte definiert sind, dann gilt*

(i) $(A^T)^T = A, \quad (A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (AB)^T = B^T A^T$

(ii) $(A(B + C))^T = B^T A^T + C^T A^T$

(ii) $(A^n)^T = (A^T)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.1.24: *Eine quadratische Matrix A ist* **symmetrisch**, *wenn $A = A^T$.*
Eine quadratische Matrix A ist **schiefsymmetrisch**, *wenn $A = -A^T$.*

Satz 2.1.25: *Für jede quadratische Matrix A gilt:*

(i) $A + A^T$ *ist symmetrisch,*

(ii) $A - A^T$ *ist schiefsymmetrisch,*

(iii) A kann auf eindeutige Weise ausgedrückt werden als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

2.2 Einige Anwendungen von Matrizen

Analytische Geometrie

Die **analytische Geometrie** [2] ist ein Teilgebiet der Geometrie, das algebraische Hilfsmittel (vor allem aus der linearen Algebra) zur Lösung geometrischer Probleme bereitstellt. Sie ermöglicht es in vielen Fällen, geometrische Aufgabenstellungen rein rechnerisch zu lösen, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen. Geometrie, die ihre Sätze ohne Bezug zu einem Zahlensystem begründet, entweder aus der Anschauung heraus oder auf einer axiomatischen Grundlage, wird demgegenüber als **synthetische Geometrie** bezeichnet.

In der Physik und anderen Naturwissenschaften werden Verfahren der analytischen Geometrie eingesetzt, etwa bei der Beschreibung von Planetenbahnen. Ursprünglich befasste sich die analytische Geometrie nur mit Fragestellungen der ebenen und der räumlichen (euklidischen) Geometrie. Analytische Geometrie im allgemeinen Sinn beschreibt affine Räume beliebiger Dimension über beliebigen Körpern.

Entscheidendes Hilfsmittel der analytischen Geometrie ist ein Koordinatensystem. In der Praxis verwendet man meist ein kartesisches Koordinatensystem. Für manche einfachen Fragestellungen, etwa die Bestimmung von Geradenschnittpunkten, die Untersuchung von Geraden auf Parallelität oder die Berechnung von Teilverhältnissen würde allerdings schon ein schiefwinkliges Koordinatensystem ausreichen. Unverzichtbar ist ein kartesisches Koordinatensystem, wenn Abstände oder Winkel berechnet werden sollen.

Ein Punkt wird beschrieben durch zwei oder mehr reelle Zahlen (Koordinaten). Gleichwertig verwendet man den so genannten Ortsvektor des Punktes, das ist der Verbindungsvektor des Ursprungs des Koordinatensystems mit dem gegebenen Punkt; die Koordinaten dieses Vektors (meist untereinander geschrieben) stimmen mit den Punktkoordinaten (meist nebeneinander notiert) überein. Kompliziertere geometrische Gebilde wie Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln usw. werden als Punktmengen aufgefasst und durch Gleichungen beschrieben. Dabei kann es sich um Koordinatengleichungen oder um Parametergleichungen handeln.

Wir betrachten die Rotation des Koordinatensystems um den Winkel ϑ gegen den Uhrzeigersinn. Sei $P = (x, y)$ ein Punkt im ersten Quadranten der Ebene. Sei r der Abstand des Punktes P vom Ursprung, und sei α der von der Verbindungslinie $\overline{OP}$ und der x-Achse eingeschlossene Winkel.

Wir berechnen die Koordinaten (x', y') des Punktes P im neuen (um den Winkel ϑ gedrehten) Koordinatensystem. Es gilt

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha\ .$$

Im neuen Koordinatensystem haben wir

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha-\vartheta) = r\cos\alpha\cos\vartheta + r\sin\alpha\sin\vartheta &&= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta, \\ y' &= r\sin(\alpha-\vartheta) = r\sin\alpha\cos\vartheta - r\cos\alpha\sin\vartheta &&= y\cos\vartheta - x\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, welche die Koordinaten x', y' im neuen Koordinatensystem ausdrücken in Termini der Koordinaten x, y des alten Koordinatensystems und des Winkels ϑ, können mittels Matrizenschreibweise geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ .$$

[2] aus Wikipedia

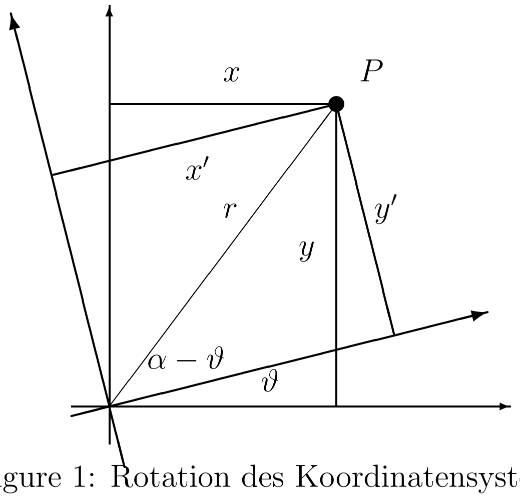

Figure 1: Rotation des Koordinatensystems um ϑ

Die 2×2 Matrix

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

heisst **Rotationsmatrix** um den Winkel ϑ. Sie hat die Eigenschaft

$$R_\vartheta R_\vartheta^T = I_2 = R_\vartheta^T R_\vartheta \ .$$

Damit ist sie ein Beispiel für eine sogenannte orthogonale Matrix.

Definition 2.2.1: *Eine $n \times n$ Matrix A heisst* **orthogonal**, *wenn*

$$AA^T = I_n = A^T A \ .$$

Nehmen wir nun an, dass wir zwei Rotationen hintereinander ausführen wollen. Zunächst werden die Koordinaten (x, y) transformiert in (x', y') durch Rotation um den Winkel ϑ, und anschliessend wird (x', y') transformiert in (x'', y'') durch Rotation um φ. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\vartheta) & \sin(\varphi+\vartheta) \\ -\sin(\varphi+\vartheta) & \cos(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Die Hintereinanderausführung von Rotationen kann also beschrieben werden durch das Produkt der betreffenden Rotationsmatrizen. Dabei spielt die Reihenfolge keine Rolle, Rotationsmatrizen kommutieren also wechselseitig, d.h.

$$R_\vartheta R_\varphi = R_{\vartheta+\varphi} = R_\varphi R_\vartheta \ ,$$

wie sich leicht mittels der trigonometrischen Additionstheoreme nachweisen lässt.

Beispiel 2.2.2: Wir betrachten etwa die durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

beschriebene Hyperbel. Wenn wir diese Hyperbel um $\pi/4$ (also 45°) rotieren, wie sieht dann die Gleichung der rotierten Hyperbel aus? Dazu beobachten wir zunächst, dass die Rotation der Hyperbel um $\pi/4$ gleichbedeutend ist mit der Rotation des Koordinatensystems um $-\pi/4$, es gilt also

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\pi/4} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun unter Ausnutzung der Beziehung

$$R_{\pi/4} R_{-\pi/4} = R_{\pi/4} R_{-\pi/4} = R_0 = I_2$$

die obige Gleichung mit $R_{\pi/4}$ multiplizieren, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

also

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' , \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' .$$

Die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ wird also transformiert in die neue Gleichung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \right)^2 = 1 ,$$

also in

$$2x'y' = 1 .$$

□

Systeme linearer Gleichungen

Definition 2.2.3: *Unter einem* **System von** m **linearen Gleichungen in den** n **Variablen** $x_1, \ldots, x_n$ *(***über** $\mathbb{R}$*) verstehen wir eine Liste von Gleichungen der Form*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei die a_{ij} *und* b_i *in* $\mathbb{R}$ *sind.*

Dieses System lässt sich kurz und prägnant schreiben als

$$A \cdot x = b ,$$

wobei

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad b = (b_1, \ldots, b_m)^T .$$

Die $m \times n$ *Matrix* A *heisst die* **Koeffizientenmatrix** *des Systems, der Vektor* b *heisst die* **rechte Seite** *des Systems. Das Gleichungssystem heisst* **homogen**, *wenn die rechte Seite der Nullvektor ist.*

Fügen wir zur Koeffizientenmatrix A *die rechte Seite* b *als weitere Spalte hinzu, so erhalten wir die* **erweiterte Matrix** $A|b \in \mathrm{Mat}_{m \times (n+1)}$ *des Gleichungssystems.*

Satz 2.2.4: *Wenn das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *über* $\mathbb{R}$ *mehr als eine Lösung hat, dann hat es unendlich viele Lösungen.*