3 Systeme linearer Gleichungen

Wir wenden uns nun dem Problem der Lösung linearer Gleichungssysteme zu.

Beispiel 3.1: Wir betrachten etwa das folgende System linearer Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & y & + & 2z & = & 1 & \quad (1) \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 & \quad (2) \\ & & 3y & - & 4z & = & 23 & \quad (3) \end{array}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (1) mit 3 und subtrahieren die neue Gleichung von (3), so erhalten wir

$$-10z = 20 \ .$$

Daraus sehen wir, dass $z = -2$ sein muss. Aus Gleichung (1) folgt damit $y = 5$ und weiters aus Gleichung (2) $x = 2y - z = 12$.

Definition 3.2: *Wir betrachten das folgende* **System von** m **linearen Gleichungen** *(***SLG***)* **in** n **Variablen über dem Körper** K*:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei $a_{ij}, b_i \in K$ für alle i, j. Wir schreiben dieses lineare Gleichungssystem auch als

$$Ax = b$$

(vergleiche Definition 2.2.3).
Ein Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ heisst **Lösungsvektor** *oder einfach* **Lösung** *dieses Gleichungssystems, wenn gilt*

$$Aa = b \ .$$

Ein Lösungsvektor heisst **nichttrivial***, wenn er verschieden ist vom Nullvektor.*
Wenn der Körper K aus dem Zusammenhang klar ist, so lassen wir ihn in dieser Notation oft einfach weg.

Im folgenden wollen wir eine systematische Methode erarbeiten, um zu entscheiden, ob ein gegebenes Gleichungssystem überhaupt Lösungen hat, und gegebenenfalls alle Lösungen zu bestimmen. Diese Methode heisst das **Gaußsche Eliminationsverfahren**, benannt nach Carl Friedrich Gauß (1777–1855).

Definition 3.3: *Sei A eine Matrix. Jede der folgenden Operationen (und nur diese) ist eine* **elementare Zeilenoperation** *auf A:*

(1) Vertauschung zweier Zeilen;

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem von 0 verschiedenen Skalar;

(3) Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Geht die Matrix B aus A hervor durch eine endliche Folge von elementaren Zeilenoperationen, so nennen wir B **zeilenäquivalent** *zu A.*
Analog kann man natürlich auch **elementare Spaltenoperationen** *definieren. Geht die Matrix B aus A hervor durch eine endliche Folge von elementaren Spaltenoperationen, so nennen wir B* **spaltenäquivalent** *zu A.* □

Elementare Zeilenoperationen können umgekehrt werden. Die Zeilenäquivalenz ist also eine Äquivalenzrelation auf Matrizen gleicher Dimension.

Satz 3.4: *Wenn die erweiterte Matrix $A'|b'$ aus $A|b$ durch eine elementare Zeilenoperation hervorgeht, so haben die linearen Gleichungssysteme*

$$Ax = b \quad \text{und} \quad A'x = b'$$

dieselben Lösungen.

Die elementaren Zeilenoperationen haben eine Entsprechung in termini von Matrizenmultiplikation.

Definition 3.5: *Eine $n \times n$* **Elementarmatrix** *ist eine Matrix, welche aus I_n hervorgeht durch eine der elementaren Zeilenoperationen. Insbesondere bezeichnen wir (für fixes n)*

(1) mit $V_{i,j}$ die $n \times n$ Matrix, welche aus I_n hervorgeht durch Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile,

(2) mit $M_{i,\lambda}$ die $n \times n$ Matrix, welche aus I_n hervorgeht durch Multiplikation der i-ten Zeile mit dem von 0 verschiedenen Skalar λ,

(3) mit $A_{i,j}$ die $n \times n$ Matrix, welche aus I_n hervorgeht durch Addition der i-ten Zeile zur j-ten Zeile. □

Beispiel 3.6: Typische 3×3 Elementarmatrizen sind etwa

$$V_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was passiert nun, wenn wir diese Elementarmatrizen von links etwa mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

multiplizieren?

$$V_{1,2} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{also die Zeilen 1 und 2 werden vertauscht}$$

$$M_{2,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{also Zeile 2 wird mit 3 multipliziert}$$

$$A_{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{also Zeile 1 wird zu Zeile 3 addiert}$$

Satz 3.7: *Sei A eine Matrix mit m Zeilen. Dann können die elementaren Zeilenoperationen auf A durch Multiplikation von links mit $m \times m$ Elementarmatrizen erreicht werden.*

(1) $V_{i,j}A$ ist die Matrix, welche aus A hervorgeht durch Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile.

(2) $M_{i,\lambda}A$ ist die Matrix, welche aus A hervorgeht durch Multiplikation der i-ten Zeile mit dem Skalar λ.

(3) $A_{i,j}A$ ist die Matrix, welche aus A hervorgeht durch Addition der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.

Satz 3.8: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ und $b \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}$. Sei E eine $m \times m$ Elementarmatrix, und sei $(A'|b') := E(A|b)$. Dann haben die Gleichungssysteme*

$$Ax = b \quad \textit{und} \quad A'x = b'$$

dieselben Lösungen.

Wir wollen nun mittels einer Folge von elementaren Zeilenumformungen (bzw. eine Folge von Multiplikationen mit Elementarmatrizen, vgl. Satz 3.8) ein gegebenes lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

umformen (ohne dabei die Lösungsmenge zu ändern) in ein äquivalentes Gleichungssystem

$$Bx = c\ ,$$

sodass im transformierten System die Lösungen einfach abgelesen werden können.

Definition 3.9: *Unter einer* **Matrix in Zeilenstaffelform** *verstehen wir eine Matrix der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ,$$

zu welcher es einen Index k gibt, $0 \le k \le m$, sodass

- $\forall l > k, 1 \le p \le n : \ a_{lp} = 0$ *(alle Zeilen nach der k-ten sind Nullzeilen);*
- *für jeden Zeilenindex i, $1 \le i \le k$, gibt es einen Spaltenindex n_i, $1 \le n_i \le n$, sodass*
$$a_{ij} = 0 \text{ für } j < n_i \text{ und } a_{in_i} \neq 0\ ;$$
- *die n_i nehmen strikt monoton zu, also*
$$\forall 1 \le i < k : \ n_i < n_{i+1}\ .$$

Wir nennen die Elemente a_{in_i} die **Staffelelemente** *der Matrix.*

Beispiel 3.10: Die folgende Matrix ist in Zeilenstaffelform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der zugehörige Index k ist 3. Dabei sind $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 6$. Die Staffelelemente sind $a_{11} = 1, a_{24} = 4, a_{36} = 1$.
Die $m \times n$ Nullmatrix ist in Zeilenstaffelform. Der zugehörige Index k ist 0. □

Satz 3.11: *Mittels elementarer Zeilenoperationen kann jede Matrix A in eine Matrix in Zeilenstaffelform transformiert werden.*

Beweis: Ist A die Nullmatrix, so ist A offensichtlich in Zeilenstaffelform ($k = 0$).
Sei also nun A eine von der Nullmatrix verschiedene $m \times n$ Matrix. Wir betrachten die erste Spalte von A (von links her), welche nicht der Nullvektor ist. Durch eine geeignete Vertauschung von Zeilen erreichen wir, dass in dieser Spalte das erste Element verschieden von 0 ist. Wir erhalten also eine Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} ,$$

in welcher gilt $b_{11} \neq 0$.
Nun subtrahieren wir, für $i = 2, 3, \ldots, n$, die 1. Zeile b_{i1}/b_{11} mal von der i-ten Zeile. Durch diese Kombination von Elementaroperationen wird die Matrix B transformiert in eine Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun mit der $(m-1) \times (k-1)$ Matrix (c_{ij}) rekursiv so verfahren wie mit der Ausgangsmatrix A, so erhalten wir schliesslich das gewünschte Ergebnis. □

Aus dem Beweis von Satz 3.11 können wir einen Algorithmus (ein Rechenverfahren) extrahieren, um aus einer beliebigen Matrix eine äquivalente Matrix in Zeilenstaffelform herzustellen. Dieses Verfahren heisst das **Gaußsche Eliminationsverfahren**. Es ist das wichtigste Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Zu einer Matrix A gibt es i.a. nicht “die” äquivalente Matrix in Zeilenstaffelform. Das sieht man etwa daran, dass man im ersten Schritt des Gaußschen Eliminationsverfahrens i.a. auswählen kann, welche Zeile man zur 1. Zeile macht. Im folgenden führen wir mit der Hermite-Matrix eine Form ein, die eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.12: *Eine $m \times n$ Matrix ist eine* **Hermite-Matrix** *bzw. ist eine* **Matrix in reduzierter Zeilenstaffelform**, *wenn*

- *A eine Matrix in Zeilenstaffelform ist,*
- *alle Staffelelemente (vgl. Def. 3.9) 1 sind, und*
- *alle Elemente oberhalb von Staffelelementen (in derselben Spalte) 0 sind.*

Beispiel 3.13: Durch elementare Zeilenoperationen können wir die Matrix A aus Beispiel 3.10 transformieren in die Hermite-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Satz 3.14: *Mittels elementarer Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix A transformieren in eine äquivalente Hermite-Matrix.*

Diese Hermite-Form ist genau das, was wir bei der Lösung von Systemen linearer Gleichungen brauchen. Um aber geeignet über diese Lösungen sprechen zu können, führen wir zunächst noch einige Begriffe ein.

Definition 3.15: *Seien $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\ldots$, $a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ Zeilenvektoren, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ Skalare. Dann ist der Zeilenvektor*

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

eine **Linearkombination** *von $a_1, \ldots, a_m$.*
Auf analoge Weise definieren wir Linearkombinationen von Spaltenvektoren.

Beispiel 3.16: Der Zeilenvektor

$$(2, -3, 1) = 2(1, 0, 0) - 3(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$$

ist eine Linearkombination der Zeilen der Einheitsmatrix I_3. Offensichtlich ist jeder Zeilenvektor der Länge 3 eine Linearkombination der Zeilen von I_3.
Ebenso ist jeder Spaltenvektor der Länge 3 eine Linearkombination der Spalten von I_3. □

Definition 3.17: *Die Zeilenvektoren $a_1, \ldots, a_m$ der Länge n heissen* **linear abhängig**, *wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ gibt, von denen mindestens einer von 0 verschieden ist, sodass sich der Nullvektor der Länge n mittels dieser Skalare als Linearkombination der a_i schreiben lässt; also*

$$0_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \quad .$$

Ist das nicht der Fall, so heissen die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ **linear unabhängig**.
Auf analoge Weise definieren wir lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit für Spaltenvektoren.

Beispiel 3.18: Die Zeilen bzw. Spalten der Einheitsmatrix I_n sind linear unabhängig. Die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, da die 4. Spalte die Summe der ersten drei Spalten ist. Die ersten 3 Spalten aber sind linear unabhängig. □

Ist einer der Vektoren $a_i, 1 \leq i \leq p$, der Nullvektor, dann sind die a_i offensichtlich linear abhängig.
Es ist sinnvoll für eine Summe über einen leeren Indexbereich den Wert 0 festzusetzen (weil 0 das neutrale Element bzgl. der Addition ist). So ist also der Nullvektor die Linearkombination von 0 Vektoren. Man beachte das im folgenden Satz.
Die leere Menge von Vektoren ist linear unabhängig. Für $I = \emptyset$ gibt es nämlich offensichtlich keinen Skalar $\lambda_i, i \in I$, sodass mindestens ein λ_i verschieden von 0 ist.

Satz 3.19: *Seien $a_1, \ldots, a_p$ Zeilenvektoren gleicher Länge, $p \geq 1$. Folgende Aussagen sind äquivalent (FAÄ):*

(i) Die Vektoren $a_1, \ldots, a_p$ sind linear abhängig.

(ii) Einer der Vektoren a_i kann ausgedrückt werden als Linearkombination der anderen.

(iii) Es gibt einen Vektor, der durch (mindestens) 2 verschiedene Linearkombinationen von $a_1, \ldots, a_p$ ausgedrückt werden kann.

Korollar: *Die Zeilen (bzw. Spalten) einer Matrix sind linear abhängig, g.d.w. eine aus den anderen durch elementare Zeilenoperationen (Spaltenoperationen) erzeugt werden kann.*

Definition 3.20: *Der* **Zeilenrang** *einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen der Matrix A. Wir schreiben dafür $\mathrm{rang}_z(A)$.*

Beispiel 3.21: Der Zeilenrang der Nullmatrix $0_{m \times n}$ ist 0.
Der Zeilenrang der Identitätsmatrix I_n ist n.
Der Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist 2. Die 3 Zeilen sind linear abhängig, aber die 1. und 3. Zeile sind linear unabhängig. □

Satz 3.22: *Elementare Zeilenoperationen verändern den Zeilenrang einer Matrix nicht. Sind also A und B zeilenäquivalent, so gilt $\mathrm{rang}_z(A) = \mathrm{rang}_z(B)$.*

Satz 3.23: *Jede Matrix kann mittels elementarer Zeilenoperationen in eine eindeutig bestimmte Hermite-Matrix transformiert werden.*
Zwei Matrizen A und B sind also zeilenäquivalent g.d.w. sie dieselbe zugehörige Hermite-Matrix haben.

Korollar: *Der Zeilenrang einer Matrix ist die Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilen in einer Zeilenstaffelform der Matrix.*

Wir untersuchen nun den Effekt von elementaren Spaltenoperationen.

Satz 3.24: *Eine elementare Spaltenoperation auf einer $m \times n$ Matrix A kann erreicht werden durch Multiplikation von rechts mit einer geeigneten Elementarmatrix. Dabei multipliziert man genau mit derjenigen Elementarmatrix, welche dieser Spaltenoperation entspricht.*

Definition 3.25: *Der* **Spaltenrang** *einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix A. Wir schreiben dafür $\operatorname{rang}_s(A)$.*

Satz 3.26: *Elementare Spaltenoperationen verändern den Spaltenrang einer Matrix nicht. Sind also A und B spaltenäquivalent, so gilt $\operatorname{rang}_s(A) = \operatorname{rang}_s(B)$.*

Satz 3.27: *Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix A sind invariant sowohl unter elementaren Zeilen- als auch Spaltenoperationen.*

Satz 3.28: *Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix sind gleich. Für eine beliebige Matrix A gilt also:*

$$\operatorname{rang}_z(A) = \operatorname{rang}_s(A) \ .$$

Definition 3.29: *Aufgrund des Satzes 3.28 sprechen wir einfach vom* **Rang** *einer Matrix A, also von der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten von A.*

Korollar zu Satz 3.28: *Für jede Matrix A gilt:* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$.

Aus dem Beweis des Satzes 3.28 sieht man, dass sich jede Matrix A in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

transformieren lässt mittels Multiplikation von links und rechts durch jeweils ein Produkt von Elementarmatrizen. Also

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Dabei ist r der Rang der Matrix A. Die Matrizen P und Q in (1) können systematisch berechnet werden, indem man auf das Schema

$$\begin{matrix} I_n & \\ A & I_m \end{matrix}$$

elementare Zeilen- und Spaltenoperationen anwendet. Ist N die Normalform von A, so erhält man schliesslich

$$\begin{matrix} Q & \\ N & P \end{matrix} \ .$$

Die Matrizen P und Q sind jedoch im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Definition 3.30: *Die Matrix auf der rechten Seite der Gleichung (1) heisst die* **Normalform** *von A. Zwei $m \times n$ Matrizen A und B heissen* **äquivalent**, *wenn sie dieselbe Normalform haben, bzw. wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.* □

Zwei Matrizen sind also äquivalent, wenn sie durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen ineinander transformiert werden können

Beispiel 3.31: Wir bestimmen die Normalform und die zugehörigen Transformationsmatrizen für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{1. und 2. Zeile vertauschen und eliminieren}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \text{2. Zeile mal } -1/3 \text{ und eliminieren}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \text{2. und 3. Spalte vertauschen und eliminieren}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \text{1. Spalte von 3. Spalte subtrahieren}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Also somit sehen wir
$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und wir haben die Normalform von A bestimmt. □

Satz 3.32: *Sei A eine $m \times n$ Matrix, b ein Spaltenvektor der Länge m.*

(i) Das homogene Gleichungssystem

$$Ax = 0$$

besitzt eine nichttriviale Lösung g.d.w. $\operatorname{rang}(A) < n$.

(ii) Das inhomogene Gleichungssystem

$$Ax = b$$

besitzt eine Lösung g.d.w. $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$.

Definition 3.33: *Ein System linearer Gleichungen (SLG) $Ax = b$ heisst* **konsistent** *g.d.w. es eine Lösung hat. Sonst heisst es* **inkonsistent**.

Satz 3.34: *Sei $Ax = b$ ein konsistentes SLG von m Gleichungen in n Variablen. Sei $r = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$. Seien $n_i, 1 \leq i \leq r$ die Staffelindizes von $H(A)$ (vgl. Def. 3.9). Dann kann den $n-r$ Variablen x_j, mit $j \notin \{n_i | 1 \leq i \leq r\}$, ein beliebiger Wert zugeordnet werden, und das SLG in den übrigen Variablen gelöst werden.*

Beispiel 3.35: Wir betrachten das SLG

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & \alpha \end{array}$$

und wollen untersuchen, für welche Werte von α es eine Lösung hat (also konsistent ist).

Dazu bestimmen wir zunächst den Rang der erweiterten Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad .$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Matrix sind also gleich g.d.w. $\alpha = \frac{4}{3}$. Ist das nicht der Fall, so gibt es keine Lösung und das SLG ist inkonsistent. Ist jedoch $\alpha = \frac{4}{3}$, so ist der Rang 2, und die Hermite-Form der erweiterten Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Wir können also $3 - 2 = 1$ Variablen einen beliebigen Wert zuweisen (etwa der Variablen z) und das SLG

$$\begin{array}{rcrcl} x & & + \; z & = & \frac{2}{3} \\ & y & & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

nach den übrigen Variablen lösen. Dabei erhalten wir die Lösung

$$(\frac{2}{3} - z,\ \frac{1}{3},\ z)^T$$

für beliebig gewähltes z. $\square$

Satz 3.36: *Sei A eine $m \times n$ Matrix und b ein Spaltenvektor der Länge m.*

(i) Seien a und a' Lösungen des homogenen SLG $Ax = 0$. Dann ist auch $\lambda a + \mu a'$ eine Lösung, für beliebige $\lambda, \mu \in K$. (Ist der Grundkörper K unendlich, so gibt es also in diesem Fall unendlich viele Lösungen.)

(ii) Sei a Lösung des homogenen SLG, und sei c Lösung des inhomogenen SLG $Ax = b$. Dann ist auch $a + c$ Lösung des inhomogenen SLG.

(iii) Seien c, d Lösungen des inhomogenen SLG. Dann ist $c - d$ Lösung des homogenen SLG.

Korollar: *Sei $A \cdot x = b$ ein konsistentes SLG.*
Sei L_h die Lösungsmenge des homogenen SLG $Ax = 0$.
Sei L_i die Lösungsmenge des inhomogenen SLG $Ax = b$.
Sei $c \in L_i$.
Dann ist $L_i = \{a + c \mid a \in L_h\}$ und $L_h = \{d - c \mid d \in L_i\}$.

Bemerkung 3.37: Wir stellen einige Beziehungen zur Analytischen Geometrie her.
Die Lösungen einer linearen Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

hängen von 2 frei wählbaren Parametern ab und bilden eine Ebene im Raum.
Eine Gerade im Raum erhält man als Schnitt von 2 Ebenen, also durch 2 lineare Gleichungen.
Sind die beiden Vektoren v und w Lösungen eines SLG, so sind alle Punkte auf der Geraden durch v und w, also alle Vektoren

$$v + \lambda(w - v)\ ,$$

Lösungen dieses SLG.
Zwei Gerade in der Ebene haben einen Schnittpunkt, es sei denn sie sind parallel. Sind die beiden Geraden parallel, so haben wir ein SLG der Form

$$(1) \quad Ax = b$$

von 2 Gleichungen in 2 Variablen, wobei $\operatorname{rang}(A) = 1$ und $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A| - b) = 2$.
Wenn wir für Punkte in der Ebene (a_1, a_2) noch eine weitere Komponente 1 einführen, einen Punkt also mit $(a_1 : a_2 : 1)$ bezeichnen, so erhalten wir wiederum alle Lösungspunkte aus dem Gleichungssystem

$$(2) \quad (A| - b) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\ .$$

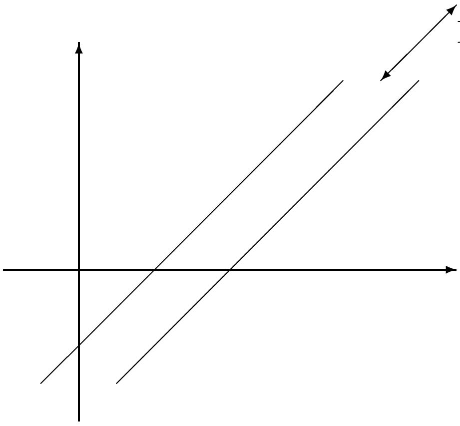

Fig. 3.1: parallele Geraden

Das SLG (2) hat aber auch Lösungen $(a_1 : a_2 : 0)$, in welchen die dritte Komponente 0 ist. Diese Lösungspunkte kann man als Punkte "am Horizont", also sogenannte "unendlich ferne Punkte" in Richtung (a_1, a_2), verstehen.
Konkret betrachten wir etwa 2 parallele Geraden

$$(1)\quad \begin{array}{rcl} x-y &=& 1 \\ x-y &=& 2 \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{rcl} x-y-z &=& 0 \\ x-y-2z &=& 0 \end{array}$$

(1) ist unösbar und (2) hat keine Lösung für $z \neq 0$. (2) hat aber die Lösung $(1 : 1 : 0)$. Die beiden parallelen Geraden schneiden einander also im unendlich fernen Punkt in Richtung $(1, 1)$.
Ähnlich verhält es sich, wenn wir eine Hyperbel schneiden mit einer ihrer Asymptoten:

$$(1)\quad \begin{array}{rcl} x\cdot y &=& 1 \\ x &=& 0 \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{rcl} x\cdot y-z^2 &=& 0 \\ x &=& 0 \end{array}$$

Dabei haben wir die Gleichungen "homogenisiert", also mittels der neuen Variablen z alle Terme auf den gleichen Grad gebracht. (1) ist unösbar und (2) hat keine Lösung für $z \neq 0$. (2) hat aber die Lösung $(0 : 1 : 0)$. Die Hyperbel und die Asymptote schneiden einander also im unendlich fernen Punkt in Richtung $(0, 1)$.

In der Geometrie nennt man den üblichen Raum (etwa die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$) auch einen **affinen Raum**. Fügt man zum affinen Raum noch die unendlich fernen Punkte hinzu, so erhält man den **projektiven Raum**. Im folgenden Satz gehen wir näher auf diesen Zusammenhang ein.

Satz 3.38: *Sei A eine $m\times n$ Matrix und b ein Spaltenvektor der Länge m. Wir betrachten das inhomogene SLG*

$$(1) \quad Ax = b$$

von m Gleichungen in n Variablen, sowie das homogene SLG

$$(2) \quad (A| - b)x' = 0$$

von m Gleichungen in $n + 1$ Variablen.

(i) Ist $a = (a_1, \ldots, a_n)$ Lösung des inhomogenen SLG (1), so ist $a' = (a_1, \ldots, a_n, 1)$ Lösung des homogenen SLG (2).

(ii) Ist $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ Lösung des homogenen SLG (2) und ist $a_{n+1} \neq 0$, so ist $\frac{1}{a_{n+1}}(a_1, \ldots, a_n)$ Lösung des inhomogenen SLG (1).

Beispiel 3.39: Wir betrachten das SLG aus Beispiel 3.1. Die Hermite-Form der erweiterten Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} .$$

Bei dieser Transformation bleiben die Lösungen invariant. Aus der Hermite-Form ist die Lösung $(12, 5, -2)^T$ unmittelbar ablesbar.

In Maple 16 könnten wir das Gleichungssystems wie folgt lösen:

> **with(LinearAlgebra):**
> **A := Matrix([[0,1,2],[1,-2,1],[0,3,-4]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

> **b := <1,0,23>;**

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 23 \end{bmatrix}$$

> **LinearSolve(A,b);**

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$