Name: ......................................

Matr.Nr.: ..................................

Stud.Kennz.: ...............................

**Klausur**
**"Lineare Algebra und Analytische Geometrie I"** (326036)
12.4.2014

---

*Bitte folgendes beachten:*

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

---

**Alle Lösungen sind zu begründen !**

(1) Seien $A$ und $B$ Mengen. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $A$, $K_\sim(a)$ die Äquivalenzklasse von $a$ bzgl. $\sim$.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
(b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$
(c) $\forall a, b \in A : \; [K_\sim(a) \cap K_\sim(b) = \emptyset] \;\vee\; [K_\sim(a) = K_\sim(b)]$

(2) Sei $A$ die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix $H_A$ zur Matrix $A$, sowie den Rang von $A$.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
(c) Für $b_1 = (1,2,1)^T, b_2 = (1,1,1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(3) Zeigen Sie für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$[\,\forall b \in \mathbb{R}_n :\ A \cdot x = b \text{ ist lösbar }] \quad \Longleftrightarrow \quad [\, A \text{ ist regulär }\,] \ .$$

(4) Sei $f$ die folgende lineare Abbildung zwischen den reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & (x-z, w, y+w) \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie Bild und Kern von $f$, also $\mathrm{im}(f)$ und $\mathrm{kern}(f)$.
(b) Geben Sie ein Repräsentantensystem an für den Faktorraum $\mathbb{R}^4/\mathrm{kern}(f)$.
(c) Geben Sie einen Isomorphismus an der Art

$$\iota : \mathbb{R}^4/\mathrm{kern}(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f) \ .$$

(5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens $n$ über $\mathbb{R}$. Sowohl $B = (1, x, x^2)$ als auch $C = (1, x-1, (x-1)^2)$ sind geordnete Basen von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.
Sei $d$ die Differentiationsabbildung

$$\begin{array}{cccc} d: & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \mapsto & a_1 + 2a_2 x \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen

$$\mathcal{A}_C^B \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_B^C \ .$$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von $d$ sowohl bzgl. $B$ als auch bzgl. $C$, also

$$\mathcal{A}(d,B,B) \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{A}(d,C,C) \ .$$

(6) Wir betrachten die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$.
(a) Geben Sie eine Basis $B$ für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$, also den Vektorraum der linearen Abbildungen von $V$ nach $W$, an.
(b) Stellen Sie die lineare Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+z, y-z) \end{array}$$

als Linearkombination der Basiselemente in $B$ dar.