Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326036)
1.2.2014

Bitte beachten Sie folgendes:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst auf der Webseite der Vorlesung.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Aufgabe 1:

Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \;=\; \frac{1}{6} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n) \;.$$

Aufgabe 2:

(a) Geben Sie eine Definition für die Gleichmächtigkeit zweier Mengen.

(b) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ an; durch eine Formel oder durch verbale Beschreibung. Begründen Sie Ihre Antwort.
Was folgt daraus für den Vergleich der Mächtigkeiten dieser Mengen?

Aufgabe 3:

(a) Geben Sie eine Definition eines Vektorraums.

(b) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit einer Teilmenge S eines Vektorraums V.

(c) Definieren Sie den Begriff der Basis eines Vektorraums V.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Gleichungssystems.

(b) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A?
Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?

(c) Wie hängen $\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(A|b)$ und die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: Betrachten Sie die reellen Vektorräume
$P := \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ...... Polynome vom Grad ≤ 2 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$,
$M := \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ...... 2×2 Matrizen mit Elementen in $\mathbb{R}$,
sowie die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f: & P & \longrightarrow & M \\ & a + bx + cx^2 & \mapsto & \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der geordneten Basen

$$B = (1, x, x^2) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) .$$

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{kern}(f)$, $\dim(\mathrm{kern}(f))$ und $\dim(\mathrm{im}(f))$.

Aufgabe 6:

(a) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K, mit $W \subseteq V$.
Zeigen Sie: *Es gibt einen Vektorraum $\tilde{W} \subseteq V$ sodass $V = W \bigoplus \tilde{W}$.*

(b) Für $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathrm{span}(\{(1,1,2,2),(1,2,3,4)\})$, wie sieht ein möglicher Raum $\tilde{W}$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort.