Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
1. Übungsblatt, Musterlösungen

P1 bis P5 steht für Peanoaxiom 1 - 5.
'Zahl' bedeute im folgenden immer 'natürliche Zahl'.
Assoziativität und Kommutativität der Addition, in Vorlesung bzw Übungen bewiesen, verwenden wir wenn benötigt ohne Kommentar.

Viele der zu zeigenden Aussagen haben die Form einer Implikation '$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$', übersetzt 'Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$'. Wir beweisen so eine Aussage, indem wir das Vorderglied $\mathcal{A}$ als wahr annehmen und daraus die Wahrheit des Hinterglieds $\mathcal{B}$ herleiten. Wir haben damit weder $\mathcal{A}$ bewiesen noch $\mathcal{B}$ sondern den Konditionalsatz $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Beispiel 1. $k \neq S(k)$

Beweis:

Induktionsanfang: $0 \neq S(0)$ [P3].

Induktionsschritt: Es sei $k \neq S(k)$. Dann gilt aber auch $S(k) \neq SSk)$ [P4].

Beispiel 2. $k \neq 0 \Rightarrow k + l \neq 0$

Beweis:

Es sei k irgendeine natürliche Zahl $\neq 0$. Wir zeigen $k + l \neq 0$ mit Induktion nach l.

Induktionsanfang: $k + 0 \neq 0$ [wahr, da $k + 0 = k \neq 0$].

Induktionsschritt: Es sei $k + l \neq 0$. Dann $k + S(l) = S(k + l) \neq 0$ [Die linke Gleichung ist die Rekursionsgleichung für die Addition, die rechte kommt von P3].

Beispiel 3. $k + l = 0 \Rightarrow k = 0 \wedge l = 0$

Beweis:

Wenn wir [2] aussagenlogisch umformen (Kontraposition), dann liest es sich

$$k + l = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Wenn also $k + l = 0$ ist, dann ist jedenfalls $k = 0$. Somit gilt $0 + l = 0$ und das heißt $l = 0$.

Beispiel 4. $k + l = k + m \Rightarrow l = m$

Beweis:

Wir wählen irgendeine Zahl l fest aus und machen Induktion nach k.

Induktionsanfang: Sei $0 + l = 0 + m$. Dann gilt $l = 0 + l = 0 + m = m$.

Induktionsschritt: Setzen wir voraus, daß für eine Zahl k die Implikation

$$k + l = k + m \Rightarrow l = m \qquad \text{(Induktionshypothese)}$$

wahr ist. Wir müssen daraus ableiten, daß $S(k) + l = S(k) + m \Rightarrow l = m$ wahr ist.

Es sei also $S(k) + l = S(k) + m$. Mit der Rekursionsgleichung der Addition gilt somit $S(k + l) = S(k + m)$, und mit P4 $k + l = k + m$. Das ist das Vorderglied der Induktionshypothese, und somit gilt $l = m$.

Nach P5 wissen wir jetzt also, daß

$$\forall k \, (k + l = k + m \Rightarrow l = m) \tag{1}$$

gilt. Da wir l oben fest gewählt haben, diese Auswahl aber völlig beliebig war, gilt die Aussage (1) für alle Zahlen l; insgesamt also

$$\forall l \, \forall k \, (k + l = k + m \Rightarrow l = m).$$

Beispiel 5. Die Anordnung natürlicher Zahlen ist definiert als

$$k \le l :\iff \exists j \in \mathbb{N} : k + j = l.$$

Zeigen Sie, dass für diese Relation gilt:

1. $n \le n$ (Reflexivität);
2. $k \le l \wedge l \le m \Rightarrow k \le m$ (Transitivität);
3. $k \le l \wedge l \le k \Rightarrow k = l$ (Antisymmetrie)

Beweis:

1. $n + 0 = n$, es gibt also eine Zahl j mit $n + j = n$ (nämlich $j = 0$). Somit $n \le n$.
2. Setzen wir $k \le l \wedge l \le m$ voraus. Das heißt, es gibt Zahlen i, j sodaß

   $$k + i = l \wedge l + j = m \qquad \text{und somit}$$

   $$k + (i + j) = (k + i) + j = l + j = m, \quad \text{also } k \le m.$$

3. Es sei $k \le l \wedge l \le k$. Das heißt $k + i = l$ und $l + j = k$ mit irgendwelchen Zahlen i, j. Insgesamt

   $$k + 0 = k = l + j = (k + i) + j = k + (i + j).$$

   Somit $0 = i + j$ [4], und nach [3] gilt $i = j = 0$. Daher $k = l$.

Beispiel 6. $k = 0 \vee 1 \le k$

Beweis:

Induktionsanfang $0 = 0 \vee 1 \le 0$ ist wahr.

Angenommen $k = 0 \vee 1 \le k$. Zu zeigen ist $S(k) = 0 \vee 1 \le S(k)$. Die linke Bedingung muß falsch sein [P3]. Die rechte ist wahr: $S(k) = S(k+0) = k + S(0) = k + 1 = 1 + k$ und daher $1 \le S(k)$.

Beispiel 7. $k \leq S(l) \iff k \leq l \vee k = S(l)$

Beweis:

'$\Rightarrow$': Es sei $k \leq S(l)$, $k + j = S(l)$, und angenommen $\neg k \leq l$. Jedenfalls $j = 0 \vee 1 \leq j$ [6]. Wenn $j = 0$ dann $k = S(l)$. Wenn $j \neq 0$ dann $1 + i = j$

$$l + 1 = S(l) = k + (1 + i) = (k + i) + 1.$$

Nach [4] gilt $k + i = l$, also $k \leq l$ ein Widerspruch. Also ist $j = 0$ und daher $k = S(l)$.

'$\Leftarrow$' ist trivial.

Beispiel 8. $k \leq l \vee l \leq k$

Beweis:

Induktion nach k.

$0 \leq l$ ist wahr $[0 + l = l]$ und somit gilt $0 \leq l \vee l \leq 0$, der Induktionsanfang.

Induktionsschritt: Sei $k \leq l$, $k + j = l$. Es gilt $j = 0 \vee 1 \leq j$ [6]. Wenn $j = 0$, dann $k = l$ und somit $l \leq S(k)$. Wenn $1 \leq j$, dann $1 + i = j$, $k + 1 + i = l$, $S(k) + i = l$, somit $S(k) \leq l$.

Beispiel 9. Die linear geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ hat ein kleinstes, aber kein größtes Element.

Beweis:

0 ist kleinstes Element, da $\forall k : 0 + k = k$.

Angenommen, $k = \mathrm{grEl}(\mathbb{N})$. Dann $k \leq S(k) \leq k$. Aus [5]: $k = S(k)$, WS zu [1].

Beispiel 10. Es sei $B \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge natürlicher Zahlen. Dann gilt

$$\exists l \in B : l \leq k \Rightarrow \exists m \in B \, \forall j \in B : m \leq j.$$

Beweis:

Die Konklusion dieser Formel bedeutet: 'B hat ein kleinstes Element' $\min(B)$.

Induktion nach k. Schreiben wir A(k) für die gesamte Formel, Also

$$A(k) \iff \big(\exists l \in B : l \leq k \Rightarrow \exists \min(B)\big).$$

Wir müssen zeigen, daß $A(k)$ wahr ist für alle k.

Wenn es ein $l \in B$ gibt mit $l \leq 0$ dann bedeutet das, daß $0 \in B$ ist, somit hat in diesem Fall B das kleinste Element 0. Also ist $A(0)$ wahr.

Es gelte $A(k)$, und nehmen wir an $\exists l \in B$ mit $l \leq S(k)$. Sei l_0 so ein l. Dann gilt $l_0 \leq k \vee l_0 = S(k)$ [7].

Wenn $\exists l \in B$ mit $l \leq k$, dann $\exists \min(B)$ nach Induktionshypothese.

Nehmen wir an, $\neg\exists l \in B$ mit $l \leq k$. Dann gilt $\neg l_0 \leq k$ und daher $l_0 = S(k)$. Sei nun j ein beliebiges Element in B. Dann gilt $\neg j \leq k$ und somit $k \leq j$ [8]. $\exists i$ mit $k + i = j$, $i = 0 \vee 1 \leq i$ [6].

Wäre $i = 0$ dann wäre $k \in B$, ein Widerspruch. Also gilt $1 \leq i$, $i = 1 + r$ und somit

$$j = k + i = k + (1 + r) = (k + 1) + r = S(k) + r = l_0 + r$$

also $l_0 \leq j$.

Wir haben gezeigt, daß $l_0 = \min(B)$.

Beispiel 11. $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine wohlgeordnete Menge, i.e., jede nichtleere Teilmenge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.

Beweis:

Es sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$. Wir wählen ein $k \in B$. Dann gilt $\exists l \in B : l \leq k$ [nämlich k selbst]. Aus [10] folgt daher, daß B ein kleinstes Elemet hat.