Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
1. Übungsblatt für den 14. 10. 2013

Die folgenden Beispiele behandeln elementare Eigenschaften natürlicher Zahlen, die Sie beweisen sollen. Die Formeln und Gleichungen sind so zu verstehen, dass sie für alle Belegungen der freien Variablen mit natürlichen Zahlen gelten sollen; zum Beispiel bedeutet die Gleichung von Beispiel 1 ausgeschrieben

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \neq S(k).$$

Um die Formeln zu beweisen, gehen Sie aus von den Peano Axiomen. Manche Eigenschaften können Sie mittels Induktion zeigen, andere direkt ohne Anwendung des Induktionsprinzips.

Die Beispiele sind aufsteigend so gewählt, dass Sie sie nacheinander beweisen können, wobei Sie eine bereits bewiesene Eigenschaft in späteren Beweisen verwenden dürfen.

In den eckigen Klammern finden Sie Anleitungen, die Sie befolgen können, aber nicht müssen; wenn Sie eine alternative (korrekte) Beweismethode finden, ist das in Ordnung.

1. $k \neq S(k)$ [Induktion]
2. $k \neq 0 \Rightarrow k + l \neq 0$ [Induktion nach l]
3. $k + l = 0 \Rightarrow k = 0 \wedge l = 0$ [direkt mit Hilfe von 2.]
4. $k + l = k + m \Rightarrow l = m$ [Induktion nach k]
5. Die Anordnung natürlicher Zahlen ist definiert als

   $$k \leq l :\iff \exists j \in \mathbb{N} : k + j = l.$$

   Zeigen Sie, dass für diese Relation gilt:

   (a) $n \leq n$ (Reflexivität);
   (b) $k \leq l \wedge l \leq m \Rightarrow k \leq m$ (Transitivität);
   (c) $k \leq l \wedge l \leq k \Rightarrow k = l$ (Antisymmetrie) [direkt mittels 4. und 3.] [1]
6. $k = 0 \vee 1 \leq k$ [Induktion]
7. $k \leq S(l) \iff k \leq l \vee k = S(l)$ ['$\Rightarrow$': mit 6. und 5b. '$\Leftarrow$' ist trivial.]
8. $k \leq l \vee l \leq k$ [Induktion nach l mittels 7. und 6.] [2]
9. Die linear geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ hat ein kleinstes, aber kein größtes Element. [Indirekter Beweis. Nehmen Sie an, es gäbe eine größte natürliche Zahl und leiten Sie daraus einen Widerspruch zu 1. ab.]

[1] Sie haben hiermit bewiesen, dass $\leq$ eine partielle Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}$ ist.
[2] Gemeinsam mit Beispiel 5. wissen wir jetzt also, das $(\mathbb{N}, \leq)$ eine `linear geordnete Menge` ist.

10. Es sei $B \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge natürlicher Zahlen. Dann gilt

$$\exists l \in B : l \leq k \Rightarrow \exists m \in B \, \forall j \in B : m \leq j.$$

[Induktion nach k][3]

11. $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine wohlgeordnete Menge, i.e., jede nichtleere Teilmenge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element. [Direkt aus 10.]

[3]Die Konklusion dieser Formel bedeutet: 'B hat ein kleinstes Element'.