Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
10. Übungsblatt für den 13. 1. 2014

1. Wir betrachten den Vektorraum Fun($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) (vgl. Beipiel 5.4), und darin die Teilmenge $E := \{e_c \mid c \in \mathbb{R}\}$, wobei für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $e_c(x)$ genau dann gleich 1 ist, wenn $x = c$; für alle $x \neq c$ dagegen gelte $e_c(x) = 0$.
   (a) Ist E linear unabhängig?
   (b) Aus welchen Funktionen besteht die lineare Hülle von E?
   (c) Bildet E eine Basis von Fun($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$)?

2. Das Gleichungssystem
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$
mit
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$
wurde in Beispiel 3.35 gelöst. Verwenden Sie diese Lösung, um den Vektor $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darzustellen.

3. Sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Jede Zeile läßt sich als Vektor im $\mathbb{R}^n$ auffassen, und die lineare Hülle dieser Vektoren heißt der *Zeilenraum* von A. Es sei B die zu A äquivalente Matrix in reduzierter Zeilenstaffelform. Zeigen Sie, dass der Zeilenraum von B mit dem von A übereinstimmt. Überprüfen Sie dies auch konkret an Hand der Matrix $\mathbf{A}$ aus Beipiel 2.

4. Bestimmen Sie eine Basis des Zeilenraums Z von $\mathbf{A}$ aus Beispiel 2. Bestimmen Sie ebenso eine Basis von N, der Lösungsmenge von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$.

5. Seien Z und N wie in Beispiel 4. Was bedeutet hier konkret die Äquivalenzrelation $\sim_Z$ (vgl. 5.32)? Interpretieren Sie die Elemente von $\mathbb{R}^3/Z$ geometrisch. Finden Sie ein Repräsentantensystem von $\mathbb{R}^3/Z$ sowie eine Basis.

   Führen Sie dieselben Konstruktionen auch mit N statt Z aus.

6. Sei Z wie in Beispiel 4. Finden Sie zwei verschiedene Unterräume U_1 und U_2, sodass $Z + U_i = \mathbb{R}^3$, für $i \in \{1,2\}$.

7. Sei U_1 die Lösungsmenge des Gleichungssystems
$$x - y + 2z = 0, \ -3x + 3y - 6z = 0,$$
und U_2 die Lösungsmenge von
$$x + y + 4z = 0.$$
Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ sowie eine Matrix $\mathbf{D}$, sodass die Lösungsmenge von $\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ exakt $U_1 \cap U_2$ ist.

8. Finden Sie eine mindestens zweielementige linear unabhängige Teilmenge von W_1 aus Bespiel 7 vom 9. Übungsblatt.