Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
11. Übungsblatt für den 27. 01. 2014

1. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie invertierbare Matrizen P und Q so, dass $P \cdot A \cdot Q$ die Normalform von A ergibt.

2. Im $\mathbb{R}^5$ sind die Teilräume
$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_4 + x_5 = 0 \ \wedge \ x_2 + 3x_4 - x_5 = 0\}$$
$$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_3 + x_4 + 5x_5 = 0\}$$
gegeben. Berechnen Sie eine Basis von U_1 und eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

3. Seien V und W Vektorräume über K und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, $w_1, \ldots, w_n \in W$. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, sodaß $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Es bezeichne B die geordnete Basis des $\mathbb{R}^2$
$$B = ((1, 1), (-1, 1)).$$
Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dreht die Punkte der Ebene um 45° gegen den Uhrzeigersinn (Drehachse: Nullpunkt). Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projiziert die Punkte der Ebene auf die x-Achse. Bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{A}(g \circ f, B, B)$.

5. Es Sei A die 2×2-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
und f die Abbildung $f\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)$, $X \mapsto A \cdot X$. Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{A}(f, B, B)$ von f bezüglich der geordneten Basis $B = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, wobei
$$(E_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1 \ldots i = k, j = l \\ 0 \ldots \text{sonst.} \end{cases}$$

6. Es seien $f_0, f_1, \ldots, f_n$ Polynome mit $\deg(f_k) = k$ $(0 \leq k \leq n)$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{Pol}_n(K)$ der Polynome vom Grad $\leq n$ ist.

7. Betrachten Sie die Polynome

$$\nu_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x - j).$$

Es ist also $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = x$, $\nu_2 = x(x-1)$ usw.

   (a) Es bezeichne $N_k = (\nu_0, \ldots, \nu_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass N_k eine Basis von $\mathrm{Pol}_k(\mathbb{R})$ ist.

   (b) Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{A}(D, N_3, N_2)$ der Differentiationsabbildung

   $$D\colon \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}),\ D(f) = \frac{df}{dx}$$

   bezüglich der Basen N_3, N_2.

8. Sei V ein Vektorraum über K, $V^\star$ sein Dualraum. Für $v \in V$ sei $\hat{v}$ die Abbildung

$$\hat{v} : V^* \to K,\ h \mapsto h(v).$$

Zeigen Sie, dass $\hat{v}$ linear ist.