Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
2. Übungsblatt für den 21. 10. 2013

1. Zeigen Sie mit Induktion:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

2. Zeigen Sie, dass für natürliche Zahlen a, b, c gilt:

   (a) $\mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c)) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$

   (b) $c \mid a$ und $c \mid b \Rightarrow c \mid \mathrm{ggT}(a, b)$

   Hinweis: Benützen Sie folgende Eigenschaft: Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{p_a}$ und $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{p_b}$ dann gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(p_a, p_b)}$ (für $p_a, p_b \in \mathbb{N}$). Wobei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet.

3. Zeigen Sie oder wiederlegen Sie für $a, b \in \mathbb{N}$:

   (a) $\mathrm{ggT}(a, b) \mid \mathrm{kgV}(a, b)$

   (b) $\mathrm{ggT}(a, b)\, \mathrm{kgV}(a, b) = ab$

   Hinweis: Benützen Sie folgende Eigenschaft: Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{p_a}$ und $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{p_b}$ dann gilt $\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(p_a, p_b)}$ (für $p_a, p_b \in \mathbb{N}$).

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen für folgende Gleichungen.

   (a) $-1104x + 1081y = 622$

   (b) $1701x + 4418y = 308$

5. Zeigen Sie eine komplexe Zahl z ist genau dann reell, wenn $z = \bar{z}$ gilt.

6. Beweisen Sie direkt aus der Definition der rationalen Zahlen (laut Skriptum) und gängigen Eigenschaften der ganzen Zahlen, dass die Gleichheit rationaler Zahlen *transitiv* ist, d.h., dass für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt: Wenn $a = b$ und $b = c$, dann ist auch $a = c$.

7. Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:

   (a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gemeinsamer Teiler von } 16 \text{ und } 24\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$

(c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 1\}$

8. Schreiben Sie folgende Mengen unter Angabe einer charakteristischen Eigenschaft an:

   (a) $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

   (b) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

   (c) $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$