Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
3. Übungsblatt für den 28. 10. 2013

1. Berechne
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \text{ und } \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}].$$
Begründen Sie die Korrektheit der Ergebnisse.

2. Sei $A := ([-1,2[\times[0,4])\Delta([0,3]\times[-2,2[)$.
   (a) Skizzieren Sie A.
   (b) Geben Sie A als Vereinigung von Produkten von Intervallen an.

3. (Siehe Satz 1.3.7 im Skriptum) Beweisen Sie für Mengen A, B, C und der Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen A_i die folgenden Beziehungen:
   (a) $A\Delta B = B\Delta A$.
   (b) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$.
   (c) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.
   (d) $A\cup\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$
   (e) $A\cup(A\cap B) = A = A\cap(A\cup B)$

4. (Siehe Satz 1.3.8 im Skriptum) Beweisen Sie für Mengen A, B und einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen in einer Universalmenge U die folgenden Beziehungen:
   (a) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$
   (b) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$

5. Beweisen Sie Satz 1.3.21 im Skriptum.

6. Sei $A = \{a, b, c\}$.
   (a) Geben Sie für jede mögliche Kombination der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv eine entsprechende Relation $\emptyset \neq R \subseteq A\times A$ an.
   (b) Geben Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf A und die dazugehörigen Äquivalenzklassen an.

7. Betrachten Sie die Relation $\sim\ \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit
$$(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2) \quad\Leftrightarrow\quad \max(|x_1|,2|x_2|) = \max(|y_1|,2|y_2|).$$

(a) Begründen Sie, warum $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $(-2, 2)$ und stellen Sie das Ergebnis in einer Skizze dar.

(c) Bestimmen Sie jeweils die Faktormenge in der Form $\{\{\ldots|\ldots\}|\ldots\}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem an.

8. Finden Sie alle Relationen auf einer Menge A, die zugleich Ordnungs- und Äquivalenzrelation sind. Begründen Sie die Korrektheit der Lösung.