Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
4. Übungsblatt für den 4. 11. 2013

1. Auf A ist die Relation $\sim$ durch $x \sim y$ g.d.w. $f(x) = f(y)$ gegeben, wobei $f : A \to B$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

2. Die Menge $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\{1, 2, 3\}\}$ ist durch $\subseteq$ geordnet.

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(A, \subseteq)$.

   (b) Ist $(A, \subseteq)$ eine Kette?

   (c) Bestimmen Sie alle minimalen und maximalen Elemente von A.

   (d) Hat A ein größtes Element? Ein kleinstes Element?

   (e) Bestimmen Sie die größte untere und die kleinste obere Schranke von A in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3. (a) Ist die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ funktional?

   (b) Geben Sie jeweils eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an für:

   i. f injektiv, f surjektiv

   ii. f injektiv, f nicht surjektiv

   iii. f nicht injektiv, f surjektiv

   iv. f nicht injektiv, f nicht surjektiv

4. Finden Sie (möglichst einfache) Beispiele für:

   (a) zwei Funktionen f und g mit $g \circ f = \mathrm{id}$ aber $f \circ g \neq \mathrm{id}$

   (b) eine Funktionen f mit $f \circ f \neq \mathrm{id}$ aber $f \circ f \circ f = \mathrm{id}$

5. Sei $f : A \to B$ und $B_i \subseteq B$ für $i \in \{1, 2\}$.

   (a) Zeigen Sie $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   (b) Gilt das auch mit $\cap$ statt $\cup$?

6. Sei $f : A \to B$ und $A_i \subseteq A$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie:

   (a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

   (b) $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ falls f injektiv

7. Beantworten Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen:

   (a) Ist $P \implies (Q \implies P)$ eine Tautologie?

   (b) Ist $A \implies \neg A$ eine Kontradiktion?

8. Sei $I \neq \emptyset$. Welche der folgenden Aussagen sind logisch äquivalent zueinander?

   (a) $\exists\, i \in I \,:\, (A_i \implies B)$

   (b) $(\exists\, i \in I \,:\, A_i) \implies B$

   (c) $\forall\, i \in I \,:\, (A_i \implies B)$

   (d) $(\forall\, i \in I \,:\, A_i) \implies B$

   Hinweis: Verwenden Sie die logische Äquivalenz von $P \implies Q$ zu $\neg P \vee Q$.

9. Bestimmen Sie $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i$ und $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i$ bezüglich des Universums U.