Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
5. Übungsblatt für den 11. 11. 2013

Die folgenden Beispiele sollten sinnvollerweise in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden.

1. Wir betrachten Bewegungen der Ebene, welche einen bestimmten Punkt (den *Nullpunkt*) fixieren. Insbesondere seien

   a, die Drehung um ein Drittel des Vollwinkels im Gegenuhrzeigersinn (mit dem Nullpunkt als Drehzentrum);

   b, die Spiegelung an der vertikalen Achse (welche den Nullpunkt enthält).

   Weiters bezeichnen wir mit i die identische Abbildung der Ebene (die „Bewegung“, die nichts bewegt) und, wenn x und y Bewegungen der Ebenen sind, sei das Produkt xy die Bewegung, welche entsteht, indem zuerst die Bewegung x ausgeführt wird, und dann die Bewegung y (die *Hintereinanderausführung* von x und y).

   Interpretieren Sie a^2, a^3, b^2, b^3, ab, a^2b, ba, ba^2 geometrisch. Handelt es sich um Drehungen oder Spiegelungen? Überlegen Sie sich, warum die Menge $\{ i, a, a^2, b, ab, a^2b \}$ mit dem erwähnten Produkt eine Gruppe bildet. Bestimmen Sie insbesondere die inversen Elemente.

   Wir bezeichnen diese Gruppe im folgenden mit G.

2. Wir zeichnen in der Ebene ein gleichseitiges Dreieck, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt sein soll, und von dem ein Eck auf der vertikalen Geraden durch den Nullpunkt liegt. Letzteres Eck bezeichnen wir mit C, die anderen mit A und B. Die Bewegungen a und b führen das Dreieck in sich über (warum?), es werden dabei aber die Eckpunkte permutiert. Welche Permutationen von $\{ A, B, C \}$ entsprechen den Elementen von G?

3. Mit D bezeichnen wir die Menge aller Drehungen von G (inklusive i). Zeigen Sie, dass D eine Untergruppe von G ist. Ist D zyklisch?

4. Wählen Sie eine der Spiegelungen von G und bilden Sie die davon erzeugte Untergruppe S. Welche Untergruppe wird von zwei verschiedenen Spiegelungen erzeugt?

5. Bestimmen Sie alle Links- und Rechtsnebenklassen von D und S. Zeigen Sie, dass D ein Normalteiler ist, S dagegen nicht.

6. Erstellen Sie eine Multiplikationstabelle für die Multiplikation in der Faktorgruppe $G/_{D}$. Was passiert, wenn Sie versuchen, auf dieselbe Weise die Multiplikation für die Äquivalenzklassen von $G/_{S}$ zu definieren?

7. Zeigen Sie, dass $D \cap S$ ebenfalls eine Untergruppe ist, $D \cup S$ dagegen nicht. Welche Untergruppe wird von $D \cup S$ erzeugt?

8. Wir definieren eine Abbildung φ von G nach $\mathbb{Z}_2$, die Gruppe der Restklassen modulo 2, durch
$$\varphi(a^i b^j) := \overline{j}.$$
Warum ist die Abbildung wohldefiniert? Zeigen Sie, dass sie sogar ein Homomorphismus ist und bestimmen Sie dessen Kern. Bestimmen Sie den Isomorphismus zwischen $G/_{\mathrm{kern}(\varphi)}$ und $\mathrm{im}(\varphi)$.

   Warum funktioniert dies nicht, wenn wir definieren $\psi : G \to \mathbb{Z}_3$ mit
$$\psi(a^i b^j) := \overline{i}.$$

9. Bestimmen Sie zwei verschiedene Automorphismen von G.