Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
6. Übungsblatt für den 18. 11. 2013

1. Beweisen Sie Satz 1.5.9:

   Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subseteq G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

   (a) $H \leq G$, i.e. H ist Untergruppe von G;

   (b) $\forall a, b \in H : a \circ b \in H \wedge a^{-1} \in H$;

   (c) $\forall a, b \in H : a \circ b^{-1} \in H$.

2. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \leq G$. Dann gilt

   $$\forall a, b \in G : |a \circ H| = |H \circ b|.$$

   i.e., alle Links- und Rechtsnebenklassen von H in G sind gleichmächtig.

3. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

   Man nennt H einen Normalteiler von G (man sagt auch H sei normal in G) - geschrieben $H \trianglelefteq G$ - wenn Links- und Rechtsnebenklassen jeweils übereinstimmen, wenn also

   $$\forall a \in G : a \circ H = H \circ a.$$

   Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

   (a) $H \trianglelefteq G$;

   (b) $\forall a \in G : a \circ H \circ a^{-1} = H$;

   (c) $\forall a \in G : a \circ H \circ a^{-1} \subseteq H$;

   (d) $\forall a \in G \, \forall h \in H : a \circ h \circ a^{-1} \in H$.

4. Das `Zentrum` einer Gruppe G ist die Menge aller Elemente von G die mit jedem Element von G kommutieren

   $$Z(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G : g \circ x = x \circ g\}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $Z(G) \trianglelefteq G$.

   (b) G is abelsch $\iff Z(G) = G$.

5. Es sei $M = \{1, 2, 3\}$ eine dreielementige Menge und S_3 die symmetrische Gruppe[1] von M.

[1] Vergleiche Skriptum 01-grundlagen, Beispiel 1.5.6.

(a) Wieviele Elemente hat die Gruppe S_3?

(b) Benennen Sie diese Elemente z.B. mit den Buchstaben $a, b, \ldots$ und entwerfen Sie eine Verknüpfungstafel von S_3.

(c) Bestimmen Sie das Zentrum von S_3.

(d) Wie verhält sich S_3 zur Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$? Sind die Gruppen isomorph? [2]

6. Es sei G eine Gruppe. Für ein Element $g \in G$ definieren wir eine Abbildung ι_g durch

$$\iota_g \colon G \longrightarrow G,\ x \mapsto g \circ x \circ g^{-1}$$

Zeigen Sie: ι_g ist ein Automorphismus von G.[3]

7. Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{Aut}(G)$ - die Menge aller Automorphismen von G - ist mit der Komposition von Abbildungen als Operation eine Gruppe.

   (b) Die Abbildung $\iota \colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ g \mapsto \iota_g$ ist ein Homomorphismus.

8. [Fortsetzung von Beispiel 7]

   (a) Es bezeichne $\mathrm{Inn}(G)$ das Bild des Homomorphismus ι, also $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{im}(\iota)$. Nach Beispiel 7 und Satz 1.5.25 ist klar, daß $\mathrm{Inn}(G)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist, genannt die `Gruppe der inneren Automorphismen` von G. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G),$$

   i.e., $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$.

   (b) Zeigen Sie daß $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

[2] Skriptum 01-grundlagen, Definition 1.5.16 und Beispiel 1.5.20.

[3] Wir nennen ι_g den durch $g \in G$ definierten `inneren Automorphismus`.