Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
7. Übungsblatt für den 2. 12. 2013

1. Sei R ein Ring und 0 neutrales Element bezüglich der Addition. Zeigen Sie
$$\forall x \in R : 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0.$$

2. Bildet $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Einselement?

3. Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie ein $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit $B \neq 0_{3\times 3}$ für die $A \cdot B = 0_{3\times 3}$ gilt.

4. Beweisen Sie Satz 2.1.13 unter der Annahme das $m = n = p = q$ gilt.

5. Beweisen Sie $(i), (ii)$ von Satz 2.1.23.

6. Wir betrachten die Menge $M := \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass $(M, +, \cdot)$ einen Ring bildet.

7. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ so definiert, dass $A_{i,j} = 0$ falls $i \neq j$ und $A_{i,i} = c$, $c \in \mathbb{R}$. (A ist also jene Matrix welche in der Hauptdiagonale überall den Eintrag c hat und sonst überall Eintrag 0 hat). Sei B eine beliebige Matrix in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie dass $A \cdot B = B \cdot A$. (Hinweis: Zeigen Sie $(A \cdot B)_{n,m} = (B \cdot A)_{n,m}$ für n, m beliebig aus $\{1, \ldots, n\}$.)

8. Wir betrachten folgende Matrizen
$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_5 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_6 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & -6 & -18 \end{pmatrix},$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Elementarmatrizen, die A_i in A_{i+1} überführen für $i \in \{1, \ldots, 6\}$.