Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
8. Übungsblatt für den 9. 12. 2013

1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie A^n, B^n und $(AB)^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Ergebnisse. (Hinweis: werten Sie die Matrizen für $n = 0, 1, 2, 3, 4...$ aus und erraten Sie eine geschlossene Form).

2. Berechnen Sie die Hermiteform (reduzierte Zeilenstaffelform) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & -12 & 11 \end{pmatrix}.$$

   Ermitteln Sie den Zeilenrang von A, den Spaltenrang von A und den Lösungsraum für das Gleichungssystem $Ax = 0$.

3. Bestimmen Sie, falls möglich, $\alpha \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} a & -b & +c & = 1 \\ 2a & -\alpha b & -\alpha c & = 0 \\ -2a & +\alpha b & & = 0 \end{array}$$

   über den Körper $\mathbb{R}$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, bzw. unendlich viele Loesungen hat.

4. Betrachten Sie die linear unabhängigen Vektoren

$$S = \{(1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0)\}.$$

   Finden Sie 2 weitere Vektoren so dass Sie insgesamt 5 linear unabhängig Vektoren erhalten. Kann man zusätzliche linear unabhängige Vektoren konstruieren?

5. Seien $\{(1, 4, 3, 2), (1, 4, 4, 0), (-1, -4, -6, 4)\}$ Vektoren über $\mathbb{R}$. Enscheiden Sie, ob diese linear abhängig sind. Wenn ja, geben Sie eine jeweilige Linearkombination an.

6. Gegeben Sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -50 & 3 & 2 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 21 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -6 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & 10 \\ 15 & -10 & 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & -10 & 0 & 0 & 16 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -45 \\ 935 \\ -192 \\ -179 \\ 137 \\ -112 \\ 43 \\ -386 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge. (Ein Computeralgebrasystem ist erlaubt und erwünscht!).

7. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ beliebig gewählt. Gibt es immer ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ so dass $A\,x = 0$ gilt? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

8. Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Hermiteform B der Matrix und lösen Sie das folgende Gleichunssystem $A\,x = b$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie Matrizen P und Q, so dass $P\,A\,Q = B$ gilt. Warum sind die Matrizen P und Q invertierbar?