Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
9. Übungsblatt für den 16. 12. 2013

1. In $\mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{R})$ sind die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$
gegeben.
   (a) Sind A und B zeilenäquivalent?
   (b) Existiert eine invertierbare Matrix P mit $B = PA$?

2. Mit den Matrizen aus Aufgabe 1:
   (a) Sind A und B äquivalent?
   (b) Berechnen Sie invertierbare Matrizen P und Q mit $B = PAQ$.

3. (a) Welche Elemente des Ringes $\mathbb{Z}_5$ besitzen multiplikative Inverse? (Geben Sie die Inversen jeweils an).
   (b) Lässt sich das Inverse von $\overline{12}$ im Ring $\mathbb{Z}_{19}$ aus der Gleichung $8 \cdot 12 + (-5) \cdot 19 = 1$ ablesen?
   (c) Bestimmen Sie das Inverse von $\overline{6}$ im Ring $\mathbb{Z}_{11}$ durch Auffinden einer ganzzahligen Lösung von
$$x \cdot 6 + y \cdot 11 = 1.$$
   (d) Sei p eine Primzahl und $\bar{a} \neq \bar{0}$ eine Restklasse in $\mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\bar{b} \in \mathbb{Z}_p$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$.
   (e) Ist der Ring $\mathbb{Z}_p$ ein Körper?

4. (a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}_3)$,
$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}$$
   (b) Lösen Sie das Gleichungsssystem $A \cdot x = (1, 0, 0)^T$.

5. Ist $V = \mathbb{R}^2$ bezüglich
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \lambda \cdot (x_1, x_2) := (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2)$$
ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

6. Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$?

(a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0, y + 3z = 0\}$

(b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

(c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 2xy + y^2 = 0\}$

Falls W_i ein Teilraum ist, geben Sie jeweils auch eine Basis von W_i an ($i = 1, 2, 3$).

7. Die Menge $V = \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ bezüglich $(f+g)(n) := f(n)+g(n)$ und $(\lambda \cdot f)(n) := \lambda f(n)$. Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von V?

   (a) $W_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : \; f(n + 2) - f(n + 1) - f(n) = 0\}$

   (b) $W_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : \; f(n + 2) - f(n + 1) - 1 = 0\}$

8. (a) Bilden die Polynome

$$p_1(x) = x^2 + 2x + 1, \; p_2(x) = x^2 - x + 3, \; p_3(x) = x^2 + x + 1$$

   eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$?

   (b) Gilt $p_3(x) \in \langle p_1(x), p_2(x) \rangle$?

   (c) Gilt $2x^2 - x + 4 \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$?